Задачи к экзамену по курсу “Дифференциальная геометрия и потоки Риччи”, весна 2010.

Для сдачи экзамена с оценкой $5-k$ достаточно решить $9-2k$ задач из списка.

Задача 1.1. **Киллингово векторное поле** X на римановом многообразии (M,g) это векторное поле, удовлетворяющее $\operatorname{Lie}_X g = 0$. Докажите, что X киллингово тогда и только тогда, когда $g(\nabla_Y X, Z) = -g(\nabla_Z X, Y)$ для любых векторных полей Y и Z.

Задача 1.2. Постройте на (S^3, g) (с обычной метрикой) ортогональную связность ∇, кручение которой удовлетворяет $g(T_\nabla(X,Y),Z) = -2\operatorname{Vol}_g$. Докажите, что она единственна. Найдите кривизну.

Задача 1.3. **Произведение Кулкарни-Номидзу** симметрических 2-форм h и k записывается формулой

$$(h \diamond k)(x,y,z,t) = h(x,z)k(y,t) + h(y,t)k(x,z) - h(x,t)k(y,z) - h(y,z)k(x,t).$$

Докажите, что $h \diamond k$ лежит в пространстве алгебраических тензоров кривизны. Докажите, что такие тензоры порождают пространство алгебраических тензоров кривизны.

Задача 1.4. Пусть g есть метрический тензор. Докажите, что $h \mapsto h \diamond g$ инъективно на $\mathsf{Sym}^2 T^*M$, и сопряженное с этим отображение есть естественная проекция алгебраических тензоров кривизны на кривизну Риччи.

Задача 1.5. Докажите, что тензор кривизны n-мерной сферы со стандартной метрикой g равен $cg \diamond g$, $c \in \mathbb{R}$.

Задача 1.6. Пусть $\phi: M \longrightarrow N$ – гомеоморфизм связных римановых многообразий, который является изометрией в хотя бы одной точке, и сохраняет тензор кривизны. Докажите, что это изометрия.

Задача 1.7. Пусть M – полное, односвязное риманово многообразие, причем в разложении Риччи тензора кривизны M встречается только скалярная кривизна. Докажите, что M изометрично сфере, гиперболическому пространству либо $\mathbb{R}^n$.

Задача 1.8. Пусть $G = SU(3)$ с метрикой g, которая инвариантна относительно правого и левого действия $SU(3)$ на себе. Докажите, что g определено однозначно с точностью до постоянного множителя. Рассмотрим подмножество $T^2 \subset G$, состоящее из диагональных матриц. Докажите, что это плоский тор, который лежит в G как вполне геодезическое подмногообразие.

Задача 1.9. Пусть M – риманово многообразие, $\dim M \geqslant 4$. Докажите, что M **конформно плоско**, то есть у каждой точки M есть окрестность, в которой метрика делается плоской после умножения на положительную функцию, тогда и только тогда, когда кривизна Вейля W равна нулю (то есть когда зануляются все компоненты кривизны, кроме скалярной и кривизны Риччи).

Задача 1.10. Пусть (M,g) – риманово многообразие, ∇_{LC} – связность Леви-Чивита, а ∇ – ортогональная связность на TM. Рассмотрим форму ${}_1 \in \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1 M$, где $T_1(X,Y,Z) = g(T_\nabla(X,Y),Z)$, а $T_\nabla \in \Lambda^2 M \otimes TM$ есть тензор кручения ∇. Предположим, что T_1 антисимметрично. Докажите, что $\operatorname{Ric}(\nabla) = \operatorname{Ric}(\nabla_{LC})$.

Определение 1.1. 2-форма на векторном пространстве V называется **невырожденной**, если она симплектична. Для $i > 2$, i-форма ρ называется **невырожденной**, если для каждого нигде не зануляющегося векторного поля X, контракция ρ с X невырождена на ортогональном дополнении к X.

Задача 1.11. Найдите все i, n, для которых на n-мерном пространстве есть невырожденные i-формы.

Задача 1.12. Пусть ρ – невырожденная в каждой точке i-форма на римановом многообразии M, ∇ – связность Леви-Чивита, а $\nabla(\rho) = 0$. Пусть $2 < i < \dim M$. Докажите, что M Риччи-плоско.

Задача 1.13. Пусть M – риманово многообразие, а объем шара радиуса r в M такой же, как в $\mathbb{R}^n$, для всех $r \in [0, \varepsilon[$. Докажите, что M риччи-плоско.

Задача 1.14. Приведите пример последовательности полных двумерных римановых многообразий, которая не имеет подпоследовательности, сходящейся по Громову-Хаусдорфу.

Задача 1.15. Пусть B – замкнутый трехмерный шар со стандартной метрикой. Найдите для каждого ε риманово многообразие B_ε, гомеоморфное B и удовлетворяющее $d_{GH}(B, B_\varepsilon) < \varepsilon$, таким образом, что B_ε лежит в ε-окрестности своей границы.

Задача 1.16. Постройте последовательность римановых метрик на трехмерной сфере, такую, что ее предел по Громову-Хаусдорфу – трехмерный шар.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей

Задача 1.17. Пусть B – векторное расслоение со связностью ∇, $d^\nabla : B \otimes \Lambda^i M \longrightarrow B \otimes \Lambda^{i+1} M$ ее продолжение, полученное по правилу Лейбница, а $R \in \Lambda^2 M \otimes \operatorname{End} B$ кривизна. Докажите **дифференциальное тождество Бьянки**, $d^\nabla R = 0$. Выведите из него, что на любом римановом многообразии имеет место равенство $ds = -2\delta \operatorname{Ric}$, где s есть скалярная кривизна, а $\delta : \mathsf{Sym}^2 T^*M \longrightarrow T^*M$ композиция $\nabla : \mathsf{Sym}^2 T^*M \longrightarrow \mathsf{Sym}^2 T^*M \otimes \Lambda^1 M$ и спаривания $\mathsf{Sym}^2 T^*M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow {}^*$.

Задача 1.18. Пусть (M, g) – n-многообразие, удовлетворяющее $\operatorname{Ric} = \lambda g$, где $\lambda \in C^\infty M$, а $n > 2$. Докажите, что λ постоянна.

Задача 1.19. Рассмотрим функционал $S(g) = \int s \operatorname{Vol}_g$, сопоставляющий метрике интеграл от ее скалярной кривизны. Докажите, что $dS(h) = \int_M \langle \frac{s}{2} g - \operatorname{Ric}, h \rangle \operatorname{Vol}_g$.

Задача 1.20. Рассмотрим пространство $\mathcal{M}_1$ метрик g на компактном многообразии M, таких, что $\int_M \operatorname{Vol}_g = 1$. Докажите, что критические точки S на $\mathcal{M}_1$ – это в точности эйнштейновы метрики.[1]

[1] Метрика называется **эйнштейновой**, если удовлетворяет $\operatorname{Ric}_g = \lambda g$.