FRIDAY OCTOBER 24, 1986 12:59:20 AM

Листочек распечатан на барабанном принтере, поставлявшемся с ЭВМ системы ОС ЕС, формулы вставлены от руки (мною). Предназначено для первокурсников, ходивших на семинар Гельфанда. Автор – Витя Гинзбург (скорее всего).

1.1. ЗАДАЧИ СРЕДНИЕ.

Если не оговорено противное, то все пространства следует считать конечномерными, а основное поле считается $\mathbb{R}$, если на нем задана евклидова структура, и $\mathbb{C}$ в противном случае.

Задача 1.1. Построить два некоммутирующих диагонализуемых оператора.

Задача 1.2. Оператор диагонализируем, когда его характеристический многочлен не имеет кратных корней.

Задача 1.3. Найти все инвариантные подпространства жордановой клетки

Задача 1.4. Линейное пространство не является объединением конечного числа собственных подпространств.

Задача 1.5. В конечномерном пространстве равенство $AB - BA = \mathsf{Id}$ невозможно.

Задача 1.6. Характеристические многочлены AB и BA совпадают (указание: рассмотреть сначала случай обратимого A).

Задача 1.7. Если $AB - \mathsf{Id}$ обратим, то и $BA - \mathsf{Id}$ обратим.

Задача 1.8. Для почти всех A множество решений уравнения $x^2 = A$ конечно и равно 2 в k-и степени, где k – размерность пространства.

Задача 1.9. Если $\mathsf{Tr}(A^k) = 0$ для всех (или почти всех) k, то A – нильпотент.

Задача 1.10. В пространстве многочленов ненулевой дифференциальный оператор $D(P) = P'$ является наложением.

Задача 1.11. Пусть K поле, $V = K[t]/P \cdot K[t]$, где $P \in K[t]$. Найдите характеристический многочлен оператора «умножение на t»: $V \longrightarrow V$.

Задача 1.12. Если B – билинейная форма, для которой $B(x, y) = 0$ титтк $B(y, x) = 0$, то B – симметрическая или кососимметрическая форма.

Задача 1.13. В евклидовом пространстве единичная сфера $(x, x) = 1$ есть множество крайних точек единичного шара $(x, x) \leqslant 1$ (точка x не крайняя в X, если она есть середина некоторого отрезка, лежащего в X).

Задача 1.14. Пусть оператор $V \oplus V \longrightarrow V \oplus V$ имеет «матрицу» $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ (A, B, C принадлежат $\mathrm{Hom}(V, V)$). Докажите, что он обратим титтк A и C обратимы.

Задача 1.15. Пусть оператор $A: V \longrightarrow V$ диагонализируем, $\dim V = n$. Тогда собственные значения A различны титтк A имеет циклический вектор, т.е. такой вектор x, что $x, A(x), A^2(x), ...A^{n-1}(x)$ порождают все пространство.

Задача 1.16. Указать необходимые и достаточные условия для того, чтобы матрица

$$\begin{pmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \ddots & & \\ \lambda_n & & & \end{pmatrix}$$

была диагонализируемой.

Задача 1.17. Найти нормальную жорданову форму оператора с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda \\ & & & 1 \end{pmatrix}^n.$$

Задача 1.18. Если $A^k = \mathsf{Id}$ при некотором k, то A диагонализируем.

Задача 1.19. Если A коммутирует с нильпотентной матрицей B, то собственные значения A и $A + B$ совпадают.

Задача 1.20. Операторы $A, B: V \longrightarrow W$ **эквивалентны**, если существуют изоморфизмы, делающие диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{A} & W \\ \phi\big\downarrow & & \big\downarrow\psi \\ V & \xrightarrow{B} & W \end{array}$$

коммутативной. Сколько классов эквивалентности операторов существует для данной пары пространств V и W?

Задача 1.21. Всякий автоморфизм кольца квадратных матриц – внутренний (то есть имеет вид $C \longrightarrow ACA^{-1}$ для данного A).

Задача 1.22. Если $A: V \longrightarrow V$ таков, что A сохраняет расстояние и $A(0) = 0$, то A линейный оператор.

1.2. ЗАДАЧИ ТРУДНЫЕ.

Задача 1.23. Пусть A – линейный оператор в пространстве V. Если для любого x вектора $x, A(x), A^2(X), ..., A^{k-1}(x)$ линейно зависимы, то степень минимального многочлена A не больше k.

Задача 1.24. Зададим на пространстве $\mathbb{R}[t]$ скалярное произведение по формуле $(f, g) := \int_0^1 fg dt$. Найдите расстояние от 1 и до A, где A – множество многочленов степени k со старшим коэффициентом 1.

Задача 1.25. Если k векторов в линейном пространстве образуют попарно тупые углы, то любые $k-1$ из них линейно независимы.

Задача 1.26. Пусть A и B линейные операторы, причем $A = AB - BA$. Тогда A – нильпотент.

Задача 1.27. Доказать, что если A, B, C – линейные операторы, причем $C = AB - BA$, а $AC = CA$, то C – нильпотент.

Задача 1.28. Если $D_1 + H_1 = D_2 + H_2$, D_1 и D_2 диагонализируемы, H_1 и H_2 нильпотентны, H_i коммутирует с D_i. то $D_1 = D_2$, а $H_1 = H_2$.

Задача 1.29. Гомоморфизм группы $GL(n, \mathbb{C})$ в мультипликативную группу поля $\mathbb{C}$, переводящий $\lambda \operatorname{\mathsf{Id}}$ в λ^n, совпадает с определителем.

Задача 1.30. Построить вложение аддитивной группы $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}$ в мультипликативную группу $GL(2n, \mathbb{R})$.

Задача 1.31. В кольце операторов в пространстве нет двусторонних идеалов.

Задача 1.32. Описать все левые и правые идеалы кольца операторов в пространстве Y.

Задача 1.33. Для любого оператора A существует такой оператор B, что $ABA = A$.

Задача 1.34. Если оператор A представлен в виде $D + H$, где D диагонализуем, а H нильпотентен (такое представление существует и единственно), то D и H можно выразить как многочлены от A.

Задача 1.35. Пусть X – нормированное пространство. Норма в X задается некоторым скалярным произведением титтк выполнено соотношение $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Задача 1.36. Если оператор B коммутирует с любым оператором, коммутирующим с A, то B есть многочлен от A.

Задача 1.37. Докажите, что множество 2x2-матриц с вещественными элементами и ипределителем 1 гомеоморфно $S^1 \times \mathbb{R}^2$ (в метрике, индуцированной из $\mathbb{R}^4$).

Определение 1.1. Матрицы A и $B := P^{-1}AP$ называются **подобными**.

Задача 1.38. В пространстве $V \oplus V$ операторы $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & \operatorname{\mathsf{Id}} \end{pmatrix}$ подобны (для обратимой A).

Задача 1.39. Множество матриц, разлагающихся в произведение верхнетреугольной и нижнетреугольной, плотно в множестве всех нильпотентных матриц.

Задача 1.40. Множество матриц, подобных

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

плотно в множестве всех нильпотентных матриц.

Задача 1.41. Пусть $A: V \longrightarrow V$ и $\|A\| \leqslant 1$. Докажите, что последовательность $\frac{A^n+A^{n-1}+\ldots+1}{n+1}$ имеет предел B такой, что $B^2 = B$. Найти $\mathsf{im}\, B$.

Задача 1.42. Доказать, что определитель общего вида, рассмотренный как многочлен от своих элементов, принятых за неизвестные, не разлагается на два множителя, каждый из которых есть многочлен ненулевой степени.