Симплектическая редукция и теорема Дональдсона-Уленбек-Яу.

Миша Вербицкий

Лаборатория алгебраической геометрии, Москва

4 марта 2011

Почти комплексные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Почти комплексная структура** на многообразии есть оператор $I \in \operatorname{End} TM$ в эндоморфизмах касательного расслоения, удовлетворяющий $I^2 = -\operatorname{Id}_{TM}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Собственное пространство I, соответствующее $\sqrt{-1}$, обозначается $V^{1,0} \subset V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, а соответствующее $-\sqrt{-1}$ обозначается $V^{0,1}$. Очевидно, $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Положительно определенное скалярное произведение, в котором I ортогонально, называется **эрмитовой метрикой**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть I – оператор почти комплексной структуры, а g – эрмитова метрика. Рассмотрим билинейную форму $\omega(x,y) = g(x, Iy)$. Тогда $\omega(x,y) = g(x,Iy) = g(Ix, I^2y) = -g(Ix,y) = -\omega(y,x)$. Поэтому ω **кососимметрична**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Форма ω называется **эрмитовой формой** на M.

Разложение Ходжа

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть α – собственное значение I. Поскольку $\alpha^2 = -1$, имеем $\alpha = \pm\sqrt{-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Собственное пространство I на $\Lambda^1 M \otimes \mathbb{C}$, соответствующее $\sqrt{-1}$, обозначается $\Lambda^{1,0}$, а соответствующее $-\sqrt{-1}$ обозначается $\Lambda^{0,1}$. Очевидно, $\Lambda^1 M \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{1,0} \oplus \Lambda^{0,1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\Lambda^{p,0}(M) := \Lambda^p_{\mathbb{C}}\Lambda^{1,0}$, $\Lambda^{0,q}(M) := \Lambda^q_{\mathbb{C}}\Lambda^{0,1}$. **Разложение Ходжа** на дифференциальных формах записывается $\Lambda^*(M) = \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q}(M)$, причем $\Lambda^{p,q}(M) = \Lambda^{p,0}(M) \wedge \Lambda^{0,q}(M)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $f: M \longrightarrow \mathbb{C}$ на почти комплексном многообразии называется **голоморфной**, если $df \in \Lambda^{1,0}(M)$.

Комплексные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексное многообразие** $(M, \mathcal{O}_M)$ есть многообразие с пучком комплекснозначных функций $\mathcal{O}_M$, которое **локально изоморфно (как окольцованное функциями пространство)** открытому шару $(B, \mathcal{O}_B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, а $\mathcal{O}_M$ – пучок голоморфных функций на нем. Оно называется **интегрируемым**, если $(M, \mathcal{O}_M)$ – комплексное многообразие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексное подмногообразие** $Z \subset M$ есть гладкое подмногообразие, такое, что I сохраняет $TZ \subset TM$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Комплексное подмногообразие **тоже является комплексным многообразием**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: На комплексном многообразии, **разложение Ходжа** для оператора де Рама задается формулой $d = \partial + \overline{\partial}$, где

$$\partial: \Lambda^{p,q}(M) \longrightarrow \Lambda^{p+1,q}(M), \quad \overline{\partial}: \Lambda^{p,q}(M) \longrightarrow \Lambda^{p,q+1}(M).$$

Кэлеровы многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексное эрмитово многообразие (M, I) называется **кэлеровым**, если комплексная структура I интегрируема, а эрмитова форма ω замкнута.

ЗАМЕЧАНИЕ: Очевидно, **форма ω симплектична.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Очевидно, комплексное подмногообразие кэлерова многообразия **тоже кэлерово** (ограничение симплектической формы к $Z \subset M$ будет замкнуто).

ЗАМЕЧАНИЕ: $\mathbb{C}P^n$ является кэлеровым, то есть **любое проективное многообразие – кэлерово.**

ЗАМЕЧАНИЕ: По теоремы Кодаиры, **компактное кэлерово многообразие проективно, если класс когомологий кэлеровой формы рационален.**

Голоморфные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Векторное расслоение** на гладком многообразии есть локально тривиальный пучок $C^\infty M$-модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Голоморфное векторное расслоение** на гладком многообразии есть локально тривиальный пучок $\mathcal{O}_M$-модулей, где $\mathcal{O}_M$ – пучок голоморфных функций.

ЗАМЕЧАНИЕ: С каждым голоморфным расслоением связано гладкое, $B_{C^\infty} := B \otimes_{\mathcal{O}_M} C^\infty M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть M – комплексное многообразие. Тогда **оператор $\overline{\partial}: C^\infty M \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M)$ $\mathcal{O}_M$-линейный**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – голоморфное расслоение. Рассмотрим оператор $\overline{\partial}: B_{C^\infty} \longrightarrow B_{C^\infty} \otimes \Lambda^{0,1}(M)$, переводящий $b \otimes f$ в $b \otimes \overline{\partial} f$, где $b \in B$ голоморфное сечение, а f гладкая функция. Этот оператор зовется **оператор голоморфной структуры** на голоморфном расслоении. **Он определен корректно в силу $\mathcal{O}_M$-линейности $\overline{\partial}$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Ядро $\overline{\partial}: B_{C^\infty} \longrightarrow B_{C^\infty} \otimes \Lambda^{0,1}(M)$ **совпадает с образом B** при естественном вложении $B \hookrightarrow B_{C^\infty}$, $b \longrightarrow b \otimes 1$.

Связность Черна

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – гладкое комплексное расслоение со связностью $\nabla: B \longrightarrow \Lambda^1(M)\otimes B$ и голоморфной структурой $\bar\partial: B \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M)\otimes B$. Рассмотрим разложение ∇ по типам, $\nabla = \nabla^{0,1} + \nabla^{1,0}$, где

$$\nabla^{0,1}: B \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M)\otimes B, \quad \nabla^{1,0}: B \longrightarrow \Lambda^{1,0}(M)\otimes B.$$

Говорят что ∇ **совместима с голоморфной структурой**, если $\nabla^{0,1} = \bar\partial$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эрмитово голоморфное расслоение** есть гладкое комплексное расслоение, снабженное эрмитовой метрикой и голоморфной структурой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Связность Черна** на эрмитовом голоморфном расслоении есть связность, совместимая с голоморфной структурой и сохраняющая метрику.

ТЕОРЕМА: На каждом голоморфном эрмитовом расслоении **связность Черна существует и единственна.**

Доказательство: Для любых $b, b' \in B$, имеем

$$\partial g(b,b') = g(\nabla^{1,0}b, b) + g(b, \bar\partial b').$$

что однозначно задает $\nabla^{1,0}b$. ∎

Кривизна связности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\nabla: B \longrightarrow B \otimes \Lambda^1 M$ связность на гладком расслоении. Продолжим ∇ до оператора на формах

$$B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^2(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^3(M) \otimes B \xrightarrow{\nabla} ...$$

по формуле $\nabla(\eta \otimes b) = d\eta + (-1)^{\tilde\eta}\eta \wedge \nabla b$. Тогда оператор $\nabla^2: B \longrightarrow B \otimes \Lambda^2(M)$ называется **кривизной** ∇.

ЗАМЕЧАНИЕ: $\nabla^2(fb) = d^2 fb + df \wedge \nabla b - df \wedge \nabla b + f\nabla^2 b$, то есть **кривизна линейна над $C^\infty M$. Мы будем рассматривать кривизну B как 2-форму со значениями в $\operatorname{End} B$.**

Класс Черна

ЗАМЕЧАНИЕ: $[\nabla, \{\nabla, \nabla\}] = [\{\nabla, \nabla\}, \nabla] + [\nabla, \{\nabla, \nabla\}] = 0$, где $\{a, b\} := ab + ba$ обозначает суперкоммутатор. Это дает **тождество Бианки**: $\nabla(\Theta_B \wedge \eta) = \Theta_B \wedge \nabla(\eta)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Связность на $\operatorname{End} B$ задается формулой $\nabla(\psi)(b) := [\nabla, \psi](b)$. Из предыдущей формулы следует, что $\nabla(\Theta_B) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ: Форма $\operatorname{Tr}_B(\Theta_B)$ замкнута,

Доказательство: $d(\operatorname{Tr}\Theta_B) = \operatorname{Tr}(\nabla\Theta_B)$. ∎

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Класс когомологий формы $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\operatorname{Tr}\Theta_B$ называется **первым классом Черна** B, и обозначается $c_1(B)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Этот класс не зависит от выбора эрмитовой формы: если мы заменим форму h на $e^f h$, класс Черна заменится на $dIdf + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\operatorname{Tr}\Theta_B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Для когерентного пучка F без кручения и с особенностями в $Z \subset M$, первый класс Черна определяется, исходя из изоморфизма $H^2(M\backslash Z) = H^2(M)$, так как $\operatorname{codim} Z \geqslant 2$ **из-за того, что F без кручения.**

Стабильные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть F – когерентный пучок на кэлеровом многообразии (M, ω). Определим **степень**

$$\deg F := \frac{\int_M \omega^{n-1} \wedge c_1(F)}{\int_M \omega^n}$$

и **наклон** $\operatorname{slope}(F) := \frac{\deg F}{\operatorname{rk} F}$, где rk это ранг (размерность).

ЗАМЕЧАНИЕ: $\operatorname{slope}(F + F') = \operatorname{slope}(F) + \operatorname{slope}(F')$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть F – когерентный пучок без кручения на кэлеровом многообразии M. Тогда F называется **стабильным**, если для любого подпучка $F' \subset F$ имеет место неравенство $\operatorname{slope}(F') < \operatorname{slope} F$, **полустабильным**, если $\operatorname{slope}(F') \leqslant \operatorname{slope} F$, и **полистабильным**, если F есть прямая сумма нескольких стабильных расслоений одинакового наклона.

ЗАМЕЧАНИЕ: Эта версия стабильности называется **стабильность по Мамфорду-Такемото** или **slope-stability**.

Связности Янг-Миллса

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, ω) – кэлерово многообразие, B расслоение, а $\omega^\sharp \in \Lambda^2 TM$ – бивектор, соответствующий ω при изоморфизме $\Lambda^2 TM \cong \Lambda^2 M$, заданном метрикой. Определим **оператор Ходжа** $\Lambda: \Lambda^{p,q}(M) \otimes \operatorname{End} B \longrightarrow \Lambda^{p-1,q-1}(M) \otimes \operatorname{End} B$ формулой $\Lambda(\eta) := \eta \lrcorner \omega^\sharp$, где $\eta \lrcorner \omega^\sharp$ получена подстановкой бивектора $\omega^\sharp$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – голоморфное расслоение, а ∇ – связность Черна, связанная с какой-то метрикой. ∇ называется **связностью Янг-Миллса** (или **Эрмита-Эйнштейна**, если ее кривизна $\Theta_\nabla \in \Lambda^{1,1}(M) \otimes \operatorname{End} B$ удовлетворяет $\Lambda(\Theta_\nabla) = c \operatorname{Id}_B$ для какой-то константы c.

ЗАМЕЧАНИЕ: Константа c такая: $c = -\sqrt{-1}\, 2\pi \dim M \deg B$.

Соответствие Кобаяши-Хитчина

ТЕОРЕМА: (Дональдсон-Яу-Уленбек) Стабильное расслоение **допускает янг-миллсову связность, которая единственна.** Также, **любое расслоение, которое допускает такую связность, полистабильно.**

СЛЕДСТВИЕ: **Тензорное произведение стабильных расслоений полистабильно, тензорное произведение полустабильных расслоений полустабильно** (следует из аддитивности кривизны при тензорном произведении расслоений).

ЗАМЕЧАНИЕ: Это теорема называется **соответствие Кобаяши-Хитчина**.

Линеаризация действия группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Линейное расслоение** есть одномерное голоморфное расслоение. $\mathcal{O}(1)$ есть стандартное линейное расслоение на $\mathbb{C}P^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$, полученное из линейных функций на $\mathbb{C}^{n+1}$. **Очень обильное расслоение** на проективном многообразии Z есть ограничение $\mathcal{O}(1)|_Z$ при каком-то голоморфном вложении $Z \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – комплексная группа Ли, которая действует на проективном многообразии M. **Линеаризация** этого действия есть обильное расслоение L, снабженное G-эквивариантной структурой. Иначе говоря, **линеаризация есть вложение $M \stackrel{j}{\hookrightarrow} \mathbb{P}(V)$, где V есть представление G, а j согласовано с действием G.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Эквивариантная структура на L единственна с точностью до автоморфизма, то есть **линеаризация определяется выбором L.**

Геометрическая теория инвариантов (GIT)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Ненулевая орбита G на векторном пространстве V называется **полистабильной**, если она замкнута, **стабильной**, если она замнута и имеет конечный стабилизатор в G, и **полустабильной**, если в ее замыкании нет нуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – комплексная группа Ли, которая действует на проективном многообразии M, L – эквивариантное очень обильное расслоение, $M \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$ – проективное вложение, а $V \backslash 0 \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}(V)$ – естественная проекция. Точка $m \in M$ называется **полистабильной**, если $\pi^{-1}(m)$ лежит в полистабильной орбите.

ТЕОРЕМА: (GIT Мамфорда) Пусть G действует на проективном многообразии M с заданной линеаризацией. Обозначим за M_{ps} множество всех полистабильных точек. Тогда **фактор M_{ps}/G – хаусдорфово, проективное многообразие,** которое обозначается $M/\!\!/G$ и называется **"GIT quotient"** (фактор по GIT).

Гамильтоновы векторные поля

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Симплектическое многообразие** есть многообразие, снабженное невырожденной, замкнутой 2-формой ω.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Симплектическое векторное поле** есть векторное поле , которое удовлетворяет $\operatorname{Lie}_X \omega = 0$, то есть соответствующий поток диффеоморфизмов действует симплектоморфизмами.

ЗАМЕЧАНИЕ: По формуле Картана, $\operatorname{Lie}_X \omega = i_X(d\omega) + d(i_X\omega)$, где i_X обозначает подстановку X. Поэтому X **симплектично тогда и только тогда, когда $X^\sharp := i_X\omega$ замкнуто.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Векторное поле X называется **гамильтоновым**, если $X^\sharp := i_X\omega$ точно. Функция H такая, что $X^\sharp = dH$, называется **гамильтонианом** X.

Отображение моментов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа Ли, действующая на M симплектоморфизмами, $\mathfrak{g}$ ее алгебра Ли, а $\mathfrak{g} \xrightarrow{\rho} TM$ – соответствующее отображение векторных полей. Предположим, что все векторные поля из $\operatorname{im}\rho$ гамильтоновы (это верно, например, если $H^1(M) = 0$). Линейное отображение $g \longrightarrow \mathbb{C}^\infty M$, ставящее каждому $v \in \mathfrak{g}$ гамильтониан, соответствующий $\rho(v)$, называется **отображением моментов** для G.

ЗАМЕЧАНИЕ: Воспользовавшись изоморфизмом $\operatorname{Hom}(\mathfrak{g}, C^\infty M) \cong \mathfrak{g}^* \otimes C^\infty M$, отображение моментов можно считать $\mathfrak{g}^*$-значной функцией $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$. Эта функция характеризуется тем, что для каждого $v \in \mathfrak{g}$, **функция $\langle \mu, v \rangle$ является гамильтонианом векторного поля $\rho(v)$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Отображение моментов называется **эквивариантным**, если для каждого $g \in G, m \in M$, имеем $\mu(gm) = \mu(m)^g$, где $\mu(m)^g$ обозначает коприсоединенное действие.

ЗАМЕЧАНИЕ: Отображение моментов **определено однозначно с точностью до постоянной функции $M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$**, то есть вектора из $\mathfrak{g}^*$, а эквивариантное отображение моментов – **однозначно с точностью до центрального элемента в $\mathfrak{g}^*$.**

Симплектическая редукция

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: (Марсден-Вейнстейн) Пусть G – связная группа Ли, действующая на симплектическом многообразии M симплектоморфизмами, с конечными стабилизаторами, а μ – эквивариантное отображение моментов. Определим **симплектическую редукцию** $M /\!\!/ G$ как фактор $\mu^{-1}(0)/G$.

ТЕОРЕМА: (Марсден-Вейнстейн) **Симплектический фактор $M /\!\!/ G$ есть симплектическое многообразие, с симплектической формой, полученной ограничением с M.**

ТЕОРЕМА: Пусть M кэлерово, компактное, $G_{\mathbb{C}}$ – связная редуктивная группа Ли, действующая на M голоморфными автоморфизмами, а G – ее компактная форма, сохраняющая кэлерову метрику, и допускающая эквивариантное отображение моментов. **Тогда $M /\!\!/ G$ снабжено естественной кэлеровой структурой.**

Симплектическая редукция и GIT

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть M проективно, а $G_{\mathbb{C}}$ редуктивная группа Ли. Тогда каждая линеаризация действия $G_{\mathbb{C}}$ однозначно задает эквивариантное отображение моментов.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Точка $m \in M$ полистабильна тогда и только тогда, когда $\mu(gm) = 0$ для какого-то $g \in G_{\mathbb{C}}$, где μ – соответствующее отображение моментов. Более того, на каждой стабильной орбите есть ровно одна точка, где μ равно нулю.

УТВЕРЖДЕНИЕ: (теорема Кемпфа-Несс) **Симплектический фактор $M/\!\!/G$ естественно отождествляется с GIT-фактором $M/\!\!/G_{\mathbb{C}}$,** причем это отождествление согласовано с кэлеровой структурой.

Набросок доказательства: Полистабильные орбиты $G_{\mathbb{C}}$ суть орбиты, которые пересекаются с $\mu^{-1}(0)$. Это задает естественное отображение $M/\!\!/G \longrightarrow M/\!\!/G_{\mathbb{C}}$. Поскольку каждая стабильная орбита $G_{\mathbb{C}}$ пересекается с $\mu^{-1}(0)$ в одной точке, **на стабильных орбитах это биекция.**

Кэлеров потенциал и отображение моментов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $d^c := IdI^{-1}$. Определим **кэлеров потенциал** кэлеровой метрики ω как функцию, удовлетворяющую $\omega = dd^c\psi$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: (локальная dd^c-лемма) **Локально, кэлеров потенциал всегда существует.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть M кэлерово, компактное, $G_{\mathbb{C}}$ – связная редуктивная группа Ли, действующая на M голоморфными автоморфизмами, G – ее вещественная форма, сохраняющая кэлерову метрику, а ψ – кэлеров потенциал. **Тогда отображение моментов можно записать так:**

$$v \longrightarrow \operatorname{Lie}_{I(\rho(v))}\psi,$$

где $v \in \mathfrak{g}$, а $\rho(v)$ есть соответствующее векторное поле.

Кэлерова структура на пространстве связностей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – гладкое комплексное расслоение со связностью $\nabla: B \longrightarrow \Lambda^1(M) \otimes B$ и голоморфной структурой $\bar\partial: B \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes B$. Рассмотрим разложение ∇ по типам, $\nabla = \nabla^{0,1} + \nabla^{1,0}$, где

$$\nabla^{0,1}: B \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes B, \quad \nabla^{1,0}: B \longrightarrow \Lambda^{1,0}(M) \otimes B.$$

Говорят что ∇ **совместима с голоморфной структурой**, если $\nabla^{0,1} = \bar\partial$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $\mathcal{A}$ есть пространство связностей, совместимых с голоморфной структурой. **Тогда $\mathcal{A}$ – аффинное пространство над $\Gamma_M(\Lambda^{1,0}(M) \otimes \operatorname{End} B)$**

ЗАМЕЧАНИЕ: **$\mathcal{A}$ – комплексное многообразие** (это линейное пространство потому что).

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим на $\mathcal{A}$ функцию $\nabla \xrightarrow{\Psi} \int_M \operatorname{Tr} \Theta_\nabla \wedge \omega^{n-1}$. Тогда $dd^c\Psi(x,y) = \int_M x \wedge \bar y \wedge \omega^{n-1}$, то есть **$\Psi$ – кэлеров потенциал.**

Кэлерова структура на пространстве связностей

СЛЕДСТВИЕ: **Отображение моментов для действия $GL(B)$ на $\mathcal{A}$ задается формулой $\nabla \longrightarrow \Lambda(\Theta_\nabla)$.**

Доказательство: $\mathrm{Tr}(\Lambda(\Theta_\nabla)g) = \mathrm{Lie}_g \mathrm{Tr}\, \Theta_\nabla$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Приняв на веру бесконечномерный аналог теоремы Кемпфа-Несс, мы **получим, что на каждой стабильной относительно $GL(B)$ орбите есть единственная янг-миллсова связность.**

Теперь соответствие Кобаяши-Хитчина следует из такой теоремы (весьма трудной)

ТЕОРЕМА: **Стабильность относительно бесконечномерной группы $GL(B)$ равносильна стабильности по Мамфорду-Такемото.**