K3 на Фонтанке,

лекция 4: формула Римана-Роха и теорема Лефшеца

Миша Вербицкий

Первая летняя математическая школа на Фонтанке: Геометрия 2017

7 июля 2017

Классы Черна (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Классы Черна суть классы $c_i(B) \in H^{2i}(B)$, $i = 0, 1, 2, ...$, определенные для любого векторного расслоения B на клеточном пространстве X, и удовлетворяющие следующим аксиомам.

1. $c_0(V) = 1$.

2. **функториальность:** если $f: X \longrightarrow Y$ непрерывно, то $f^* c_i(B) = c_i(f^* B)$.

3. **Формула Уитни:** $c_*(B \oplus B') = c_*(B) c_*(B')$, где $c_*(B) = \sum_i c_i(B)$ **("тотальный класс Черна")**

4. Если $\mathcal{O}(i)$ – стандартное расслоение на проективном пространстве, то $c_1(\mathcal{O}(1)) = [H]$, где $[H]$ – фундаментальный класс гиперплоскости, а для всех $i > 0$, $c_i(\mathcal{O}(1)) = 0$.

Когерентные пучки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – комплексное многообразие, $\mathcal{O}_M$ – структурный пучок (пучок голоморфных функций). **Когерентный пучок** на комплексном многообразии $\mathcal{O}_M$ есть пучок $\mathcal{O}_M$-модулей, локально изоморфный фактору свободного пучка $\mathcal{O}_M^n$ по конечно-порожденному $\mathcal{O}_M$-подмодулю. Когда M проективно, определение когерентных пучков такое же, но "локально" означает "локально в топологии Зариского". **Из принципа GAGA Серра следует, что эти два определения экцивалентны.**

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть M – проективное многообразие. Докажите, что **для когерентных пучков определены классы Черна, которые функториальны и удовлетворяют аксиоме Уитни**.

Когерентные пучки и резольвенты

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $X \hookrightarrow Y$ – комплексное подмногообразие. **Докажите, что когерентные пучки на X можно интерпретировать как когерентные пучки на Y с носителем в X.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть F – градуированный модуль над градуированным кольцом $\mathbb{C}[t_1, ..., t_{n-1}]$ однородных полиномов. Однородные полиномы задают функции на стандартных картах $\mathbb{C}P^n$, значит, **F задает когерентный пучок на $\mathbb{C}P^n$.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **любой когерентный пучок получается таким образом.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **любой когерентный пучок F на $\mathbb{C}P^n$ имеет резольвенту вида $0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow F_0 \longrightarrow F \longrightarrow 0$,** где все F_i получаются как прямые суммы линейных расслоений.

УКАЗАНИЕ: **Это будет свободная резольвента** градуированного модуля над градуированным кольцом $\mathbb{C}[t_1, ..., t_{n-1}]$.

Очень обильные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $X \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ – проективное многообразие, а $\mathcal{O}(1)$ расслоение, заданное линейными функционалами на $\mathbb{C}^{n+1}$. Обозначим за $\mathcal{O}(p)$ p-ю тензорную степени $\mathcal{O}(p)$. Ограничение $\mathcal{O}(p)$ на X называется **очень обильным расслоением**., **Обильное расслоение** – линейное расслоение, положительная степень которого очень обильна.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **очень обильное расслоение глобально порождено.**

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть L очень обильно, а F – когерентный пучок. **Докажите, что $F \otimes L^N$ глобально порождено для достаточно большого $N > 0$.**

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть L очень обильно, а F – когерентный пучок. **Докажите, что $H^i(F \otimes L^N) = 0$ для достаточно большого N и любого $i > 0$.**

K-группа и классы Черна

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X – алгебраическое многообразие. Обозначим за $K(X)$ группу, порожденную классами изоморфизма $[F]$ когерентных пучков F на X, и заданную соотношениями вида $[F_1]+[F_3]=[F_2]$ для каждой точной последовательности $0\longrightarrow F_1\longrightarrow F_2\longrightarrow F_3\longrightarrow 0$. Эта группа называется **K-группой Гротендика** (и еще иногда K_0).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $F_0\longrightarrow F_1\longrightarrow F_2\longrightarrow ...$ – комплекс когерентных пучков. Соответствующий класс в $K(X)$ обозначается за $[F_*]:=\sum_i(-1)^i[F_i]$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если X гладко, любой когерентный пучок на X имеет конечную резольвенту из векторных расслоений, то есть локально тривиальных пучков (докажите это). **Поэтому в качестве образующих $K(X)$ можно брать комплексы векторных расслоений, а в качестве соотношений - точные последовательности комплексов.**

Эйлерова характеристика когерентного пучка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эйлерова характеристика** когерентного пучка F есть число $\chi(F) := \sum_i (-1)^i \dim H^i(F)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для любой точной последовательности пучков $0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_3 \longrightarrow 0$, имеем $\chi(F_2) = \chi(F_1) + \chi(F_3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: **Проверьте самостоятельно** (примените длинную точную последовательность когомологий). ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Таким образом, χ **задает гомоморфизм** $K(X) \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z}$**.**

Теорема Римана-Роха-Хирцебруха

ТЕОРЕМА: (Римана-Роха-Хирцебруха) Пусть F – когерентный пучок на гладком компактном многообразии. **Тогда $\chi(F)$ зависит только от классов Черна $c_*(F)$, и выражается через них следующим образом:**

$$\chi(F) = \int_X ch_*(F) \wedge td_*(TX),$$

где $td_*(TX)$ обозначает **тотальный класс Тодда** касательного расслоения TX,

$$td_* = 1 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_1^2 + c_2}{12} + \frac{c_1 c_2}{24} + \frac{-c_1^4 + 4c_1^2 c_2 + c_1 c_3 + 3c_2^2 - c_4}{720} + \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Формально **класс Тодда можно определить следующим образом:** он удовлетворяет формуле Уитни $td_*(B \oplus B') = td_*(B) td_*(B')$, а для линейного расслоения L с $c_1(L) = \alpha$, имеем $td_*(L) = \frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}}$.

Доказательство теоремы Римана-Роха для кривых

ТЕОРЕМА: (Риман-Рох для кривых):
Пусть F – когерентный пучок на кривой. Тогда

$$\chi(F) = c_1(F) + \operatorname{rk}(F)(1-g).$$

Доказательство. Шаг 1: Поскольку группа $K(X)$ порождена линейными расслоениями, **достаточно проверить формулу для линейного расслоения L**. В самом деле, любой когерентный пучок имеет резольвенту из линейных расслоений степени $-d << 0$ (проверьте это). Можно также выбрать эти L таким образом, что пучок L^* порожден глобальными сечениями. **Чтобы убедиться в этом, надо вложить X в $\mathbb{C}P^n$, и строить такую резольвенту для когерентного пучка на $\mathbb{C}P^n$.**

Шаг 2: Пусть l – сечение L^*, а $0 \longrightarrow L \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow C \longrightarrow 0$ – соответствующая точная последовательность. **В K-группе учок кручения C эквивалентен прямой сумма пучков-небоскребов $\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_x$, сосредоточеных в его носителе.**

Шаг 3: Осталось доказать Римана-Роха для $\mathcal{O}_X$ и для пучков-небоскребов. Для $\mathcal{O}_X$ $\chi(\mathcal{O}_X) = 1-g$ по определению $g = \dim H^1(\mathcal{O}_X)$. Для пучков-небоскребов, $\chi(F) = 1 = c_1(F)$. ■

Римана-Рох-Хирцебрух для поверхностей (слабая версия)

ЗАМЕЧАНИЕ: В следующем утверждении и его доказательстве, $c_1(L)$ для линейных расслоений обозначается буквой L, а фундаментальный класс дивизора D обозначается D. Форма пересечения в $H^2(X)$ обозначается (A, B).

УТВЕРЖДЕНИЕ: (Риман-Рох-Хирцебрух для линейных расслоений на поверхности; слабая версия): Пусть L – линейное расслоение на поверхности X. Тогда

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{(L - K_X, L)}{2}, \qquad (*)$$

где $K_X = \Omega^2 X$ есть каноническое расслоение, а (A, B) обозначает форму пересечения, примененную к классам Черна.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_2 \longrightarrow L_2|_D \longrightarrow 0$ – точная последовательность, где L_i – линейные расслоения, а D – гладкая кривая рода g. **В силу РР для кривых, имеем** $\chi(L_1) = \chi(L_2) + (L_2, D) + (1 - g)$

Шаг 2: По формуле присоединения, $K_D = K_X|_D \otimes ND$**, где** ND **есть нормальное расслоение.** С другой стороны, $g - 1 = \deg K_D/2$. Это дает $1 - g = -(K_X + D, D)/2$.

Римана-Рох-Хирцебрух для поверхностей (продолжение)

Шаг 3: Обозначим за $\chi'(L)$ правую часть формулы (*), $\chi'(L) := \chi(\mathcal{O}_X) + (L - K_X, L)/2$. В условиях шага 1, имеем $c_1(L_2) = c_1(L_1) + D$, что дает

$$\chi'(L_2) - \chi'(L_1) = \frac{1}{2}\Big[(L_2 - K_X, L_2) - (L_2 - K_X - D, L_2 - D)\Big] = (L_2, D) - (K_X + D, D)/2.$$

Шаг 4: Сравнивая утверждения шага 2 и шага 3, получаем $\chi'(L_2) - \chi'(L_1) = \chi(L_2) - \chi(L_1)$. Значит, **РРХ для L_2 равносилен ему же для L_1.**

Шаг 5: Для каждого обильного расслоения A, $L \otimes A^{\otimes N}$ имеет гладкие сечения для $N \gg 0$, что дает точную последовательность $0 \longrightarrow L \longrightarrow L \otimes A^{\otimes N+1} \longrightarrow L \otimes A^{\otimes N+1}|_D \longrightarrow 0$. Значит, **достаточно доказать (*) для расслоения $L \otimes A^{\otimes N+1}$, которое можно считать очень обильным.**

Шаг 6: Для очень обильных расслоений L, имеем $0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow L \longrightarrow L|_D \longrightarrow 0$, где D – множество нулей общего сечения L. Поскольку D гладко, а (*) верна для $\mathcal{O}_X$, **получаем (*) для L.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Формула Римана-Роха-Хирцебруха для поверхностей следует из (*) и **формулы Нетера**: $\chi(\mathcal{O}_X) = (c_1(X)^2 - c_2(X))/12$, но ее я доказывать не буду.

К3-поверхности (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **К3-поверхность** есть комплексная поверхность с $b_1 = 0$ и $c_1 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Все поверхности с $b_1 = 0$ - кэлеровы** (Бухдаль-Ламари).

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Каноническое расслоение K_M тривиально.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Теорема Римана-Роха дает $\chi(\mathcal{O}_M) = 2 = \frac{c_2(M)}{12}$, значит, $c_2(M) = 24$. Поскольку $c_2(M)$ есть эйлерова характеристика M, получаем $b_2(M) = 22$.

Это дает ромб Ходжа для К3-поверхности:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 20 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Классификация форм пересечения (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Симметричная билинейная форма η на $V := \mathbb{Z}^n$ называется **унимодулярной**, если она задает изоморфизм $V \longrightarrow V^*$, **четной**, если множество всех $\eta(x,x)$ содержится в $2 \cdot \mathbb{Z}$, и **нечетной** если нет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Симметричная 2-форма η называется **неопределенной**, если $\eta(x,x) < 0$ и $\eta(y,y) > 0$ для каких-то x и y.

ТЕОРЕМА:
(классификация унимодулярных симметричных билинейных форм): Пусть q – четная унимодулярная неопределенная форма на V. **Тогда (V,q) разлагается в ортогональную прямую сумму** подпространств с билинейной формой, которая имеет вид $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (такие пространства называются "гиперболическими"), и подпространств $E_{\pm 8}$, изоморфных решетке пересечения корней алгебры E_8:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

или такой же решетке с формой пересечения противоположного знака.

Экспоненциальная точная последовательность

Из экспоненциальной точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_M \longrightarrow \mathcal{O}_M \longrightarrow \mathcal{O}_M^* \longrightarrow 0,$$

получаем точную последовательность

$$H^1(\mathcal{O}_M) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_M^*) \longrightarrow H^2(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} H^2(\mathcal{O}_M).$$

Группа $H^2(\mathcal{O}_M)$ отождествляется с $H^{0,2}(M)$, значит, ядро отображения α это $H^2(M, \mathbb{Z}) \cap \ker \alpha = H^2(M, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(M)$.

Мы доказали предложение

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Множество первых классов Черна голоморфных линейных расслоений на кэлеровом многообразии это $H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z})$.

Форма пересечения для K3-поверхности

ЛЕММА: Пусть η – нечетная форма пересечения на $V := \mathbb{Z}^n$, а $P := \mathbb{P}(V \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})$ – соответствующее проективное пространство. Обозначим за R множество нечетных векторов $r \in V$. Тогда образ $\pi(R)$ в P плотен.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $s \in V$ – любой вектор. Для доказательства плотности R в P **достаточно найти элемент из $\pi(R)$ в любой окрестности $\pi(S)$.**

Шаг 2: Пусть $r_0 \in R$. Последовательность $r_0 + 2Ns$ состоит из нечетных векторов, а ее образ в P сходится к s. ■

ТЕОРЕМА: **Форма пересечения K3-поверхности M четная.**

Доказательство. Шаг 1: В силу доказанного на прошлой лекции, множество K кэлеровых форм M (для всех комплексных структур) открыто в $H^2(M, \mathbb{R})$. Значит, его проективизация $\mathbb{P}K$ открыта в $\mathbb{P}H^2(M, \mathbb{R})$.

Шаг 2: Если форма пересечения $H^2(M, \mathbb{Z})$ нечетна, в силу предыдущей леммы, найдется нечетный целочисленный класс r с $\pi(r) \in \mathbb{P}K$. Тогда $r \in H^{1,1}(M, \mathbb{Z})$, значит, **существует голоморфное расслоение L с $c_1(L) = r$.** Но $\chi(L) = 2 + \frac{1}{2}\int_M r \wedge r$ по формуле Римана-Роха. Значит, **самопересечение r четно.** ■

Гладкие квартики

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Гладкой квартикой** называется гладкая гиперповерхность в $\mathbb{C}P^n$, заданная неприводимым однородным полиномом степени 4.

ЗАМЕЧАНИЕ: По формуле Эйлера, каноническое расслоение на $\mathbb{C}P^n$ есть $\mathcal{O}(-n-1)$. Формула присоединения, примененная к гладкой поверхности $Z \subset \mathbb{C}P^n$ степени m, дает $N^*Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} K_Z = K_{\mathbb{C}P^n}|_Z$, а коль скоро $N^*Z = \mathcal{O}(-m)$ и $K_{\mathbb{C}P^n} = \mathcal{O}(-n-1)$, **имеем $K_Z = \mathcal{O}(m-n-1)$.**

СЛЕДСТВИЕ: **Гладкая квартика в $\mathbb{C}P^3$ есть поверхность с тривиальным каноническим расслоением.**

ЗАМЕЧАНИЕ: В дальнейшем, говоря про "гладкие квартики", **я буду подразумевать квартики размерности 2.**

Гладкие квартики и теорема Лефшеца о гиперплоском сечении

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **k-е вложение Веронезе** есть проективное вложение $\mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(k)^*)$, заданное линейной системой $\mathcal{O}(k)$. Иначе говоря, **вложение Веронезе переводит** $(t_0 : t_1 : ... : t_n)$ **в** $(P_0(t_0, ..., t_n) : P_1(t_0, ..., t_n) : ... : ...)$**, где** P_i **обозначает какой-то базис в однородных многочленах степени** k**.**

СЛЕДСТВИЕ: Гладкая квартика есть пересечение образа 4-го отображения Веронезе и общей гиперплоскости.

ТЕОРЕМА: (Лефшеца о гиперплоском сечении)
Пусть $Z \subset \mathbb{C}P^n$ – гладкое, проективное многообразие размерности m, а $H \subset \mathbb{C}P^n$ – гиперплоское сечение, трансверсально пересекающее Z. Тогда **для любого** $i < m - 1$**, отображение гомотопических групп** $\pi_i(Z \cap H) \longrightarrow \pi_i(Z)$ **– изоморфизм.**

Доказательство см. ниже.

СЛЕДСТВИЕ: Гладкая двумерная квартика является К3-поверхностью.

В самом деле, $\pi_1(Z) = \pi_1(\mathbb{C}P^3) = 0$ по теореме Лефшеца, примененной к образу Веронезе.

Скрученный дифференциал d^c (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I) – комплексное многообразие, $I: TM \longrightarrow TM$ – **оператор комплексной структуры**, $I^2 = -\mathrm{Id}_{TM}$. **скрученный дифференциал** d^c определяется формулой $d^c := I^{-1} dI$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M, I) - комплексное многообразие. Тогда $\partial := \frac{d+\sqrt{-1}\, d^c}{2}$, $\overline{\partial} := \frac{d-\sqrt{-1}\, d^c}{2}$ – **компоненты в разложении Ходжа** d: $\partial = d^{1,0}$, $\overline{\partial} = d^{0,1}$.

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие. **Тогда следующие утверждения равносильны:**

1. I интегрируемо.
2. $\partial^2 = 0$.
3. $\overline{\partial}^2 = 0$.
4. $dd^c = -d^c d$
5. $dd^c = 2\sqrt{-1}\, \partial\overline{\partial}$.

Плюрисубгармонические функции Морса

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если на многообразии M заданы координаты $x_1, ..., x_{2n}$, можно определить **гессиан** функции $f \in C^\infty M$: $\operatorname{Hess}(f) = \sum_i \frac{d^2 f}{dx_i dx_j} \cdot dx_i \otimes dx_j \in \operatorname{Sym}^2 M$. **В точках, где $df = 0$, гессиан не зависит от выбора координат (проверьте это).** Функция f называется **морсовской**, если во всех ее критических точках, $\operatorname{Hess}(f)$ – невырожденная билинейная симметрическая форма. **Индекс** критической точки z есть количество отрицательных собственных значений у $\operatorname{Hess}(f)\Big|_{T_z M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция f на комплексном многообразии M называется **плюрисубгармонической**, если $dd^c f$ есть положительная (1,1)-форма, то есть $dd^c f(x, Ix) \geqslant 0$ для любого $x \in TM$, и **строго плюрисубгармонической**, если $dd^c f(x, Ix) > 0$ для любого ненулевого $\in TM$.

ПРИМЕР: $f = |z|^2$ строго плюрисубгармонична на $\mathbb{C}^n$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть f – строго плюрисубгармоническая функция Морса на n-мерном многообразии. **Тогда индекс критических точек f не превосходит n.**

Доказательство см. следующий слайд.

Плюрисубгармонические функции Морса (продолжение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть f – строго плюрисубгармоническая функция Морса на n-мерном многообразии. **Тогда индекс критических точек f не превосходит n**

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $dd^c f = 2\sqrt{-1}\partial\bar\partial f$ – (1,1)-форма, она I-инвариантна: $dd^c f(Ix, Iy) = dd^c f(x,y)$. Значит, $dd^c f(Ix, y) = dd^c f(I^2 x, Iy) = -dd^c(x, Iy)f = dd^c(Iy, x)f$. Мы получили, что **форма** $\operatorname{Hess}_c(f) := dd^c f(x, Iy)$ **симметрическая.** Эта форма называется **комплексный гессиан**. Для плюрисубгармонических функций, она неотрицательно определена.

Шаг 2: Пусть координаты $x_1, y_1, x_2, y_2, ...$ на M таковы, что $I(dx_i) = dy_i$, а $I(dy_i) = -dx_i$. Тогда

$$dd^c(f) = \sum_i dx_i \wedge dy_i \left(\frac{d^2 f}{dx_i^2} + \frac{d^2 f}{dy_i^2}\right),$$

что дает

$$\operatorname{Hess}_c(f) = \sum_i \left(\frac{d^2 f}{dx_i^2} + \frac{d^2 f}{dy_i^2}\right)[dx_i \otimes dx_i + dy_i \otimes dy_i]$$

Мы получили $\operatorname{Hess}_c(f) = \operatorname{Hess}(f) + I \operatorname{Hess}(f)$.

Плюрисубгармонические функции Морса (окончание)

Мы получили $\operatorname{Hess}_c(f) = \operatorname{Hess}(f) + I\operatorname{Hess}(f)$**.**

Шаг 3: Для любой строго плюрисубгармонической функции Морса, все собственные значения ее комплексного гессиана положительны. Пусть m – критическая точка f, а $dz_1, ..., dz_{2n} \in T_m M$ – базис, в котором $\operatorname{Hess}(f)$ и $I\operatorname{Hess}(f)$ ортогональны. Такой базис существует для любой пары билинейных симметрических форм, если одна из них положительно определена; **проверьте это**, и примените к паре форм $\operatorname{Hess}_c(f)$, $\operatorname{Hess}(f)$.

Шаг 4: Пусть $\operatorname{Hess}(f)(dz_i, dz_i) = \alpha_i$, а $\operatorname{Hess}(f)(dz_i, dz_i) = \beta_i$. Поскольку формы $\operatorname{Hess}(f)$, $I\operatorname{Hess}(f)$ сопряжены, у них одинаковая сигнатура. Тогда $\operatorname{Hess}_c(f)(dz_i, dz_i) = \alpha_i + \beta_i$. Поскольку форма $\operatorname{Hess}_c(f) = \operatorname{Hess}(f) + I\operatorname{Hess}(f)$ положительно определена, $\alpha_i + \beta_i > 0$, то есть **как минимум половина** α_i **неотрицательна.** ■

Теорема Лефшеца о гиперплоском сечении

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть f – функция Морса на гладком многообразии M, а $\operatorname{grad} f$ ее градиентное векторное поле. **Стабильное многообразие** критической точки m есть все точки $z \in M$ такие, что $\lim\limits_{t \longrightarrow \infty} e^{-t \operatorname{grad} f} z = m$.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть Z_m – стабильное многообразие критической точки m индекса p. **Докажите, что Z_m гладкое, p-мерное подмногообразие в M.**

ТЕОРЕМА: **(Теорема Лефшеца о гиперплоском сечении)** Пусть $Z \subset \mathbb{C}P^n$ – гладкое, проективное многообразие размерности m, а $H \subset \mathbb{C}P^n$ – гиперплоское сечение, трансверсально пересекающее Z. Тогда **для любого $i < m - 1$, отображение гомотопических групп $\pi_i(Z \cap H) \longrightarrow \pi_i(Z)$ – изоморфизм.**

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим функцию $f := |z|^2$ на $\mathbb{C}P^n \backslash H = \mathbb{C}^n$, пошевелим ее таким образом, чтобы она оставалось плюрисубгармоничной, но стала морсовской на $Z \backslash (H \cap Z)$ **(докажите, что это возможно)**.

Теорема Лефшеца о гиперплоском сечении (продолжение)

Шаг 2: Пусть $S_i \subset Z \backslash (H \cap Z)$ – стабильные множества всех критических точек f на Z. Тогда $Z \cap H$ **является деформационным ретрактом** $Z_0 := Z \backslash \bigcup_i S_i$. Для доказательства сего, рассмотрим отображение $z \longrightarrow e^{-t \operatorname{grad} f}$, и устремим t к бесконечности; для любого $z \in Z_0$, **предел лежит на $Z \cap H$, и непрерывно зависит от $t \in [0, \infty]$ и z.**

Шаг 3: Поскольку f плюрисубгармонична, индекс критических точек f не превосходит n. Значит, $\dim S_i \leqslant n$. В силу предыдущего шага, Z_0 гомотопически эквивалентно $H \cap Z$. Теперь **теорема Лефшеца вытекает из следующей топологической леммы.**

ЛЕММА: Пусть Z – гладкое многообразие, а S_i – набор гладких подмногообразий в Z, $\operatorname{codim} \dim S_i \geqslant n$. Обозначим за Z_0 дополнение $Z_0 := Z \backslash \bigcup_i S_i$ Тогда естественное вложение $Z_0 \longrightarrow Z$ **индуцирует изоморфизм гомотопических групп** $\pi_i(Z_0) \cong \pi_i(Z)$ для всех $i < n - 1$, и сюрьективно для $i = n - 1$.

Теорема Лефшеца о гиперплоском сечении (окончание)

ЛЕММА: Пусть Z – гладкое многообразие, а S_i – набор гладких подмногообразий в Z, $\operatorname{codim}\dim S_i \geqslant n$. Обозначим за Z_0 дополнение $Z_0 := Z\backslash \bigcup_i S_i$ Тогда естественное вложение $Z_0 \longrightarrow Z$ **индуцирует изоморфизм гомотопических групп** $\pi_i(Z_0) \cong \pi_i(Z)$ для всех $i < n-1$, и сюрьективно для $i = n-1$.

Доказательство. Шаг 1: Чтобы убедиться, что $\pi_i(Z_0) \xrightarrow{j} \pi_i(Z)$ сюрьективно, возьмем какой-то элемент в $\pi_i(Z)$, **представим его иммерсией сферы $\Sigma^i \longrightarrow Z$ и продеформируем эту сферу, чтобы она стала трансверсальна к S_i.** Это можно сделать, когда $i < \operatorname{codim}_M S_i \leqslant n-1$. Поскольку $\Sigma^i \subset Z_0$, ее класс в $\pi_i(Z)$ лежит в образе j.

Шаг 2: Пусть $\Sigma^i \longrightarrow Z_0$ – отображение сферы, гомотопное нулю в Z. **Гомотопию можно изобразить как отображение из $i+1$-мерного шара B^{i+1} в Z, граница которого переходит на Σ^i.** И сферу и гомотопию можно выбрать гладкой, потом пошевелить, чтобы образ B^{i+1} пересекал S_i трансверсально. Поэтому, если $i+1 < \operatorname{codim} S_i \geqslant n$, образ шара не будет пересекать S_i, что дает гомотопию образа Σ^i в точку внутри Z_0. ■.