Поверхности Инуэ, их обобщения, и китайская теорема об остатках.

Миша Вербицкий

Лаборатория алгебраической геометрии, Москва

28 января 2011

Сольвмногообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – гладкое многообразие, снабженное транзитивным действием разрешимой группы Ли G. Тогда M называется **сольвмногообразием**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть – комплексное многообразие, снабженное транзитивным, голоморфным действием вещественной разрешимой группы Ли G, а $\Gamma \subset G$ – ее дискретная подгруппа. Фактор M/Γ называется **комплексным солвмногообразием**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексная поверхность** есть компактное комплексное многообразие размерности 2.

Двумерные комплексные солвмногообразия классифицированы в работе Хасегавы

arXiv:0804.4223, Keizo Hasegawa
Complex and Kaehler structures on compact solvmanifolds.

Примеры двумерных солвмногообразий

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Поверхность Хопфа** есть фактор $\mathbb{C}^2\backslash 0$ по $\mathbb{Z}$, действующему линейными растяжениями.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Поверхность Хопфа диффеоморфна $S^3 \times S^1$.**

Терминологическое замечание: Вышеописанная поверхность Хопфа называется "primary" либо "type I". Ее фактор по конечной группе - "secondary", либо "type II"

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть T, T' – эллиптические кривые. **Поверхность Кодаиры** есть локально тривиальное расслоение над T со слоем T' и нетривиальным классом Черна.

ЗАМЕЧАНИЕ: С точностью до конечного накрытия, **поверхность Кодаиры диффеоморфна $S^1 \times (G/G_{\mathbb{Z}})$,** где G есть группа верхнетреугольных матриц 3x3 ("группа Гейзенберга"), а $G_{\mathbb{Z}}$ – группа целочисленных верхнетреугольных матриц.

Классификация Хасегавы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: ("теорема Богомолова") **Поверхность Инуэ** есть двумерное комплексное многообразие без кривых и с $b_2 = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Определение Инуэ было явным, в терминах матриц. Вышеприведенное определение есть следствие классификационной теоремы Богомолова.

ТЕОРЕМА: Пусть M – комплексное, компактное, двумерное солвмногообразие. **Тогда M есть одна из следующих поверхностей.**

1. Двумерный тор и его конечные факторы

2. Поверхность Хопфа, либо ее конечные факторы

3. Поверхность Кодаиры

4. Поверхность Инуэ

Теорема Хасегавы следует из классификации Кодаиры и теоремы Богомолова.

Нормирования на поле

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Нормирование** на поле k есть функция $|\cdot|: k \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, удовлетворяющая следующим условиям.

1. Ноль: $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2. Мультипликативность: $|xy| = |x||y|$.

3. Существует $c > 0$ такое, что $|\cdot|^c$ удовлетворяет неравенству треугольника.

ПРИМЕР: Функция взятия модуля на $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

ПРИМЕР: Пусть p – простое число, а $m, n \in \mathbb{Z}$ взаимно просты с p. Определим **p-адическое нормирование** на $\mathbb{Q}$ формулой $|\frac{m}{n}p^k| := p^{-k}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: p-адическое нормирование удовлетворяет дополнительной "аксиоме неархимеда": $|x + y| \leqslant \max(|x|, |y|)$. Такие нормирования называются **неархимедовыми**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Любая степень неархимедова нормирования снова неархимедова, и **удовлетворяет неравенству треугольника.**

Нормирования и топология

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $|\cdot|$ – нормирование. Рассмотрим топологию с базой окрестностей точки x, состоящей из множеств вида

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in k \ \ | \ \ |x-y| < \varepsilon\}.$$

Нормирования называются **эквивалентными**, если они индуцируют одинаковую топологию.

ТЕОРЕМА: **Два нормирования $|\cdot|_1, |\cdot|_2$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $|\cdot|_1 = |\cdot|_2^c$ для какого-то $c > 0$.**

ТЕОРЕМА: (Островский) **Любое нормирование на $\mathbb{Q}$ эквивалентно обычному ("архимедову") либо p-адическому.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пополнением** поля k относительно нормирования $|\cdot|$ называется пополнение k в метрике вида $|\cdot|^c$, где $c > 0$ константа такая, что $|\cdot|^c$ удовлетворяет неравенству треугольника.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пополнение поля относительно нормирования - снова поле.

ПРИМЕР: Пополнение $\mathbb{Q}$ относительно p-адического нормирования называется **поле p-адических чисел**, и обозначается $\mathbb{Q}_p$.

Локальные поля

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Числовое поле** есть конечное расширение $\mathbb{Q}$. **Функциональное поле** есть конечное расширение $\mathbb{F}_p(t)$. **Глобальное поле** есть числовое поле либо функциональное поле. **Локальное поле** есть пополнение глобального поля по нетривиальному нормированию.

ТЕОРЕМА: Пусть $\bar{k}$ – поле, полное и локально компактное относительно нормирования. **Тогда это локальное поле.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $K : k$ – конечное расширение поля k, а $x \in K$ – какой-то элемент. Рассмотрим умножение на x как k-линейный эндоморфизм векторного пространства K. Определим **норму** $N_{K/k}(x)$ как детерминант этого эндоморфизма.

ЗАМЕЧАНИЕ: Норма задает гомоморфизм мультипликативных групп $K^* \longrightarrow k^*$.

ТЕОРЕМА: Пусть $\overline{K} : \bar{k}$ есть конечное расширение локального поля, степени n. **Тогда нормирование $\bar{k}$ единственным образом продолжается до нормирования $\overline{K}$.** Более того, **это продолжение можно задать формулой $|x| := \left|N_{K/k}(x)\right|^{\frac{1}{n}}$.**

Нормирования и расширения глобальных полей

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть A, B – расширения поля k характеристики 0, причем $A : k$ конечное. **Тогда $A \otimes_k B$ есть прямая сумма полей, содержащих A и B.**

ТЕОРЕМА: Пусть k – числовое поле, снабженное нормированием $|\cdot|$, K – его конечное расширение, а $\overline{k}$ – пополнение. Рассмотрим разложение $K \otimes_k \overline{k}$ в прямую сумму полей, $K \otimes_k \overline{k} := \bigoplus_i \overline{K}_i$. **Тогда каждое продолжение нормирования с k на K индуцировано с какого-то из $\overline{K}_i$, причем все такие продолжения неэквивалентны.**

ЗАМЕЧАНИЕ: В частном случае, где $k = \mathbb{Q}$, а $|\cdot|$ есть обычное нормирование, получаем, что все K_i суть расширения $\mathbb{R}$, то есть изоморфны $\mathbb{R}$ либо $\mathbb{C}$. Это дает

СЛЕДСТВИЕ: **Для каждого числового поля K степени n над $\mathbb{Q}$, существует не более чем конечное число различных вложений $K \hookrightarrow \mathbb{C}$.** Обозначим за t число таких вложений, образ которых лежит в $\mathbb{R}$ (такие вложения называются **вещественными**), и за $2s$ число вложений, образ которых не лежит в $\mathbb{C}$ (такие вложения называются **комплексными**. Тогда $t + 2s = n$.

Теорема Дирихле о единицах

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $K:\mathbb{Q}$ есть числовое поле степени n. **Кольцо целых** $\mathcal{O}_K \subset K$ есть целое замыкание $\mathbb{Z}$ в K, то есть множество всех корней многочленов вида $P(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + ... + a_0$ с целыми коэффициентами $a_i \in \mathbb{Z}$, лежащих в K.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Аддитивная группа $\mathcal{O}_K^+$ есть конечно порожденная абелева группа без кручения, то есть изоморфна $\mathbb{Z}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Единица кольца $\mathcal{O}_K$ есть такой элемент $u \in \mathcal{O}_K$, что u^{-1} тоже лежит в $\mathcal{O}_K$.

Теорема Дирихле о единицах. Пусть K – числовое поле, у которого есть t вещественных вложений и $2s$ комплексных. **Тогда группа единиц $\mathcal{O}_K^*$ изоморфна $G \times \mathbb{Z}^{t+s-1}$,** где G конечна. Если к тому же $t > 0$, то $G = \pm 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для квадратичных полей, группа единиц есть группа решений уравнения Пелля.

Кубические поля и комплексные поверхности

Пусть $K:\mathbb{Q}$ – кубическое расширение $\mathbb{Q}$, имеющее два комплексных вложения σ, $\overline{\sigma}$ и одно вещественное вложение τ (такое расширение задано присоединением корня кубического многочлена, который имеет ровно один вещественный корень).

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу теоремы Дирихле, $\mathcal{O}_K^*$ изоморфноа$\mathbb{Z}\times\{\pm 1\}$. Пусть $\mathcal{O}_K^{*,+} := \tau^{-1}(\mathbb{R}^{>0})\cap\mathcal{O}_K^*$. Легко видеть, что **группа $\mathcal{O}_K^{*,+}$ изоморфна $\mathbb{Z}$.**

Рассмотрим действие $\mathcal{O}_K^+\cong\mathbb{Z}^3$ на $\mathbb{R}^3=\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ по формуле

$$\rho^+(x)(z,t) := (z+\sigma(x), t+\tau(x)).$$

Пусть Γ есть скрещенное произведение $\mathcal{O}_K^+\rtimes\mathcal{O}_K^{*,+}$, заданное естественным действием $\mathcal{O}_K^{*,+}$ на $\mathcal{O}_K^+$. **Определим действие Γ на $\mathbb{C}\times H$, где H – верхняя полуплоскость, следующим образом.**

Подгруппа $\mathcal{O}_K^+\subset\Gamma$ действует на $\mathbb{C}\times H=\mathbb{C}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{>0}$ сдвигами по формуле, приведенной выше (тривиально на последнем аргументе), а $\mathcal{O}_K^{*,+}$ действует мультипликативно по формуле

$$\rho^*(\xi)(z,z') := (\sigma(\xi)z, \tau(\xi)z').$$

Поверхности Инуэ типа S^0

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Поверхность Инуэ типа S^0 есть фактор $(\mathbb{C}\times H)/\Gamma$.

Свойства: 1. Это компактное, комплексное солвмногообразие.

2. Поверхность Инуэ **допускает плоскую связность, сохраняющую комплексную структуру** (по построению).

3. Ее когомологии такие же, как у $S^3\times S^1$.

ТЕОРЕМА:
Поверхность Инуэ $M := (\mathbb{C}\times H)/\Gamma$ **не имеет комплексных кривых.**

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим на $\mathbb{C}\times H$ функцию $\varphi(z,z') := \log \operatorname{Im}(z')$. Поскольку Γ умножает $\operatorname{Im}(z')$ на число, **форма $d\varphi$ Γ-инвариантна.** Обозначим за θ соответствующую 1-форму на M.

Шаг 2: 2-форма $\omega_0 := d(I\theta)$ имеет тип (1,1) (то есть является псевдо-эрмитовой) и **положительно определена на листах слоения $\{z\}\times H\subset \mathbb{C}\times H$** ($\omega_0$ есть метрика Пуанкаре на этих листах):

$$\omega_0 = \sqrt{-1}\,\partial\bar\partial \log\varphi = \sqrt{-1}\,\frac{dz'\wedge d\bar z'}{|\operatorname{im} z'|^2},$$

Кривые на поверхности Инуэ

Шаг 3: Обозначим за $\Sigma \subset TM$ нуль-пространство формы ω_0. **Это комплексное, голоморфное, инволютивное подрасслоение,** листы которого получены из $\mathbb{C} \times \{z'\} \subset \mathbb{C} \times H$

Шаг 4: Для любой комплексной кривой C на M, $\int_C \omega_0 = 0$, так как ω_0 точна. Значит, C лежит в каком-то из листов слоения Σ. **Осталось доказать, что у Σ нет компактных листов.**

Шаг 5: Пусть Σ_0 – лист слоения Σ, Его прообраз в $\mathbb{C} \times H$ содержит множество

$$\tilde{\Sigma}_0 := \bigcup_{z \in \mathbb{C}, \zeta \in \mathcal{O}_K^+} \Big(z, (z' + \tau(\zeta))\Big)$$

где $z' \in H$ – фиксированная точка. В силу того, что образ τ плотен в $\mathbb{R}$, **замыкание $\tilde{\Sigma}_0$ содержит $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \operatorname{Im}(z')$.**

Шаг 6: Получили, что **замыкание $\Sigma_0 \subset M$ как минимум трехмерно,** то есть **Σ не имеет компактных листов.**

Многообразия Олжеклауса-Тома

Пусть K – числовое поле, имеющее $2s$ комплексных вложений и t вещественных, $t > 0$, $s > 0$. Обозначим за $\sigma : \ \mathcal{O}_K \longrightarrow \mathbb{C}^s$ вложение вида $\xi \longrightarrow (\sigma_1(\xi), ..., \sigma_s(\xi))$, за $\tau : \ \mathcal{O}_K \longrightarrow \mathbb{R}^t$ вложение вида $\xi \longrightarrow (\tau_1(\xi), ..., \tau_t(\xi))$.

Пусть $\mathcal{O}_K^{*,+} := \mathcal{O}_K^* \cap \bigcap_i \tau_i^{-1}(\mathbb{R}^{>0})$. Эта группа действует на H^t по формуле

$$\xi \in \mathcal{O}_K^{*,+}, (z_1, z_2, ..., z_t) \in H^t \xrightarrow{\tau^*} \Big(\tau_1(\xi) z_1, \tau_2(\xi) z_2, ..., \tau_t(\xi) z_t\Big)$$

Выберем в $\mathcal{O}_K^{*,+}$ свободную абелеву подгруппу $\mathcal{O}_K^{*,U}$ ранга t такую, что фактор $\mathbb{R}^t / \mathcal{O}_K^{*,U}$ компактен, где $\mathcal{O}_K^{*,U}$ отображается в $\mathbb{R}^t$ формулой

$$\xi \longrightarrow \Big(\log(\tau_1(\xi)), ..., \log(\tau_t(\xi))\Big).$$

Пусть $\Gamma := \mathcal{O}_K^{+} \rtimes \mathcal{O}_K^{*,U}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Многообразие Олжеклауса-Тома есь фактор $\mathbb{C}^s \times H^t$ по Γ, где $\mathcal{O}_K^{+}$ действует на $\mathbb{C}^s \times H^t$ по формуле $\zeta(x, y) = (x + \sigma(\zeta), y + \tau(\zeta))$, а $\mathcal{O}_K^{*,U}$ по формуле $\xi(x, y) = (x, \tau^*(\xi) y)$.

Комплексная геометрия многообразий Олжеклауса-Тома

ТЕОРЕМА: Пусть K – числовое поле, имеющее $2s$ комплексных вложений и t вещественных, $t > 0$, $s = 1$. **Тогда у соответствующего многообразия Олжеклауса-Тома нет нетривиальных комплексных подмногообразий**.

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим на $\mathbb{C}\times H^t$ функцию $\varphi(z, z_1, ..., z_t) := \prod_i \operatorname{Im}(z_i)$. Поскольку Γ умножает $\operatorname{Im}(z_i)$ на число, **форма $d\log\varphi$ Γ-инвариантна.** Обозначим за θ соответствующую 1-форму на M.

Шаг 2: 2-форма $\omega_0 := d(I\theta)$ имеет тип (1,1) и **положительно определена на листах слоения $\{z\}\times H^t \subset \mathbb{C}\times H^t$**

$$\omega_0 = \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}\log\varphi = \sqrt{-1}\,\sum_i \frac{dz_i\wedge d\overline{z}_i}{|\operatorname{im} z_i|^2},$$

Шаг 3: Обозначим за $\Sigma \subset TM$ нуль-пространство формы ω_0. **Это комплексное, голоморфное, инволютивное подрасслоение,** листы которого получены из $\mathbb{C}\times\{(z_1, ..., z_t)\} \subset \mathbb{C}\times H^t$.

Шаг 4: Для любого комплексного k-мерного подмогообразия $C \subset M$, интеграл $\int_C \omega_0^k = 0$, так как ω_0 точна. Значит, C в каждой точке касается какого-то из листов слоения Σ. **Поскольку Σ одномерно, это значит, что C содержит какой-то лист Σ.**

Шаг 5: Осталось доказать, что любое подмногообразие, которое содержит целиком какой-то лист Σ, совпадает с M.

Шаг 6: Пусть Σ_0 – лист слоения Σ, Его прообраз в $\mathbb{C} \times H^t$ содержит множество

$$\tilde{\Sigma}_0(z_1, ..., z_t) := \bigcup_{z \in \mathbb{C}, \zeta \in \mathcal{O}_K^+} \Big(z, (z_1 + \tau_1(\zeta), ..., z_t + \tau_t(\zeta))\Big)$$

где $z' \in H$ – фиксированная точка.

Шаг 7: Значит, теорема вытекает из следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Замыкание Σ_0 содержит множество

$$Z_{\alpha_1, ..., \alpha_t} := \{(\zeta, \zeta_1, ..., \zeta_t) \ \mid \ \operatorname{im} \zeta_i = \alpha_i, i = 1, ..., t\}$$

где $\alpha_i = \operatorname{im} z_i$.

Сильная теорема об аппроксимации

Предыдущее утверждение сразу вытекает из следующей теоремы, примененной ко **множеству $\rho_1, ..., \rho_m$ всех вещественных вложений.**

Теорема 1 Пусть $K : \mathbb{Q}$ – числовое поле, имеющее $2s$ комплексных вложений $\sigma_1, \overline{\sigma}_1, ...$ и t вещественных, $\tau_1, ..., \tau_t$, а $\rho_1, ..., \rho_m$ - вложения K в $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$, причем каждое из σ_i и τ_i встречается не более чем по одному разу, и хотя бы одно из них не встречается. Рассмотрим отображение $R: \ K \longrightarrow \mathbb{R}^a \times \mathbb{C}^b$, переводящее ξ в $\rho_1(\xi), ..., \rho_m(\xi)$. **Тогда образ $\mathcal{O}_K$ плотен в $\mathbb{R}^a \times \mathbb{C}^b$.**

В доказательстве используется теорема об аппроксимации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Адельная группа $\mathcal{A}_K$ есть подмножество произведения $\prod_\nu K_\nu$ всех пополнений K по всем нормированиям ν, состоящее из всех последовательностей $(x_{\nu_1}, ..., x_{\nu_n}, ...)$ где $|x_{\nu_i}| \leqslant 1$ для почти всех i.

Теорема об аппроксимации: Рассмотрим естественное вложение $K \subset \mathcal{A}_K$. **Тогда его образ - дискретная, кокомпактная подгруппа.** Более того, если мы спроектируем $\mathcal{A}_K$ на произведение всех нормирований , кроме одного, тогда **образ K плотен в образе $\mathcal{A}_K$.**

Применение теоремы об аппроксимации:

Доказательство теоремы 1. Шаг 1: Пусть $\mathcal{O}_{A_K}$ есть кольцо всех **целых аделей,** то есть таких аделей $(x_{\nu_1}, ..., x_{\nu_n}, ...)$, что $|x_{\nu_i}| \leqslant 1$ для любого неархимедово нормирования. **Тогда $\mathcal{O}_K = K \cap \mathcal{O}_{A_K}$.**

Шаг 2: Пусть теперь $P: \mathcal{A}_K \longrightarrow \mathcal{A}_1$ есть проекция $\mathcal{A}_K$ на произведение всех нормирований, кроме одного архимедова. **Поскольку $\mathcal{O}_{A_K}$ открыто в $\mathcal{A}_K$, его проекция в $\mathcal{A}_1$ открыта в $\mathcal{A}_1$.**

Шаг 3: Значит, образ $P(K) \cap P(\mathcal{O}_{A_K})$ плотен в $P(\mathcal{O}_{A_K})$. **В силу шага 1, этот образ совпадает с образом $\mathcal{O}_K$ в $\mathcal{A}_1 \cap P(\mathcal{O}_{A_K})$.**

Шаг 3: Мы доказали, что образ $\mathcal{O}_K$ в $\mathcal{A}_1$ плотен в $\mathcal{A}_1 \cap P(\mathcal{O}_{A_K})$. **Значит, его проекция на произведение всех архимедовых нормирований, кроме одного, тоже плотна.**