Комплексные поверхности 6: теорема Торелли для К3

Задача 6.1. Пусть Z – пространство всех невырожденных комплексных 2-форм на компактном 4-мерном многообразии, удовлетворяющих $\Omega^2 = 0$, с топологией, индуцированной с топологии Фреше на пространстве всех 2-форм. Докажите, что Z – многообразие Фреше.

Задача 6.2. В условиях предыдущей задачи, пусть $Z_0 \subset Z$ – пространство всех замкнутых форм в Z. Постройте ретракцию некоторой окрестности $Z_0 \subset Z$ на Z_0.

Задача 6.3. Рассмотрим действие группы изотопий $\operatorname{Diff}_0(M)$ компактного ориентированного многообразия на пространстве V_λ всех невырожденных форм объема η, удовлетворяющих $\int_M \eta = \lambda$. Докажите, что это действие транзитивно.

Задача 6.4. Пусть (M, I) – компактное, комплексное n-многообразие с тривиальным каноническим расслоением, а $\Omega_t \in \Lambda^{n,0}(M, I)$ – семейство форм объема, таких, что $[\Omega_t] = const$. Докажите, что существует семейство голоморфных диффеоморфизмов V_t таких, что $V_t^*\Omega_0 = \Omega_t$.

Задача 6.5. Пусть M есть К3-поверхность, снабженная гиперкэлеровой структурой (g, I, J, K), а $h \in \operatorname{End}(TM)$ – кватернионно-линейный эндоморфизм. Докажите, что в какой-то точке M, $h = 1$.

Задача 6.6. Докажите, что на К3 нет метрики с сигнатурой (-,+,+,+).

Задача 6.7. Рассмотрим разложение 2-форм на кэлеровой К3, $\Lambda^2(M) = \Lambda^-(M) \oplus \Lambda^+(M)$. Докажите, что любое сечение $\Lambda^-(M)$ где-нибудь зануляется.

Задача 6.8. Пусть η – 2-форма на кэлеровой К3, такая, что $\frac{\eta\wedge\eta}{\operatorname{Vol} M} \leqslant 0$. Докажите, что $\eta \wedge \eta$ где-нибудь зануляется.