Комплексные поверхности,

лекция 11: Эллиптические операторы и сильный принцип максимума

Миша Вербицкий

НМУ/матфак ВШЭ, Москва

23 апреля 2012

Векторные поля и дифференциальные операторы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть R - кольцо над полем k. k-линейное отображение D из кольца R в R-модуль (например, в R) называется **дифференцированием**, если оно удовлетворяет правилу Лейбница: $D(xy) = yD(x) + xD(y)$ Очевидно, любое векторное поле задает дифференцирование на кольце $C^\infty(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Дифференцирования кольца $C^\infty(M)$ кольца гладких функций это векторные поля на M.** Это - одно из определений векторного поля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть R - кольцо над полем k. **Дифференциальный оператор порядка** 0 — это отображение $R \stackrel{v}{\to} R$, которое R-линейно, то есть переводит $r \in R$ в $v(1)r$. Множество таких операторов обозначается $\operatorname{Diff}^0(R)$. Дифференциальный оператор порядка $i > 0$ определяется индуктивно: $a \in \operatorname{Diff}^i(R)$**, если для любого** $v \in \operatorname{Diff}^0(R)$**, коммутатор** $[a, v]$ **лежит в** $\operatorname{Diff}^{i-1}(R)$**.** Мы имеем цепочку вложений

$$\operatorname{Diff}^0(R) \subset \operatorname{Diff}^1(R) \subset \operatorname{Diff}^2(R) \subset ...$$

Объединение всех $\operatorname{Diff}^i(R)$ называется **множеством дифференциальных операторов**.

Дифференциальные операторы на расслоениях

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Дифференциальные операторы на кольце $C^\infty M$ называются **дифференциальными операторами на** , и обозначаются $\operatorname{Diff}^*(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Это определение равносильно обычному (whatever it is).

ЗАМЕЧАНИЕ: Аналогично определяются **дифференциальные операторы из модуля M над кольцом R в модуль M' над R.** Операторы нулевого порядка - R-линейные, операторы i-го порядка - такие, коммутатор которых с любым R-линейным эндоморфизмом M и M' дает дифференциальный оператор $i-1$-го порядка.

ЗАМЕЧАНИЕ: Напомню, что проективный конечно порожденный модуль над кольцом – это прямое слагаемое свободного модуля. Векторные расслоения на гладком многообразии можно рассматривать как $C^\infty M$-модули, отождествляя расслоение с пространством его сечений. **Дифференциальные операторы из одного расслоения в другое** можно определить как дифференциальные операторы на соответствующих $C^\infty M$-модулях.

Фильтрованные алгебры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: (Возрастающая) фильтрация на векторном пространстве V есть последовательность подпространств $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset ...$ таких, что $\bigcup V_i = V$. **Фильтрованная алгебра** это алгебра A с фильтрацией $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset ...$ такая, что $A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Композиция дифференциальных операторов i-го и j-го порядка имеет порядок $\leqslant i + j$ (докажите это). Это задает фильтрацию

$$\operatorname{Diff}^0(R) \subset \operatorname{Diff}^1(R) \subset \operatorname{Diff}^2(R) \subset ...$$

на кольце дифференциальных операторов над R.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $D^i \in \operatorname{Diff}^i(R)$, $D^j \in \operatorname{Diff}^j(R)$ – дифференциальные операторы. **Докажите, что их коммутатор $[D^i, D^j]$ лежит в $\operatorname{Diff}^{i+j-1}(R)$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A = \bigcup_i A_i$ - ассоциативная алгебра с фильтрацией. Определим умножение на $\bigoplus_i A_i/A_{i-1}$ так, что произведение $a \mod A_{i-1}$ и $b \mod A_{j-1}$ дает $ab \mod A_{i+j-1}$. Такая алгебра называется **присоединенной градуированной алгеброй** фильтрованной алгебры A.

Алгебра символов

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **присоединенная градуированная алгебра к алгебре дифференциальных операторов коммутативна.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Эта алгебра называется **алгеброй символов дифференциальных операторов**.

ТЕОРЕМА: $\operatorname{Diff}^i(M)/\operatorname{Diff}^{i-1}(M)$ **изоморфно пространству сечений расслоения** $\operatorname{Sym}^i TM$**.**

Набросок доказательства: Для $i = 1$, это утверждение очевидно из явного описания дифференциальных операторов первого порядка (это дифференцирования плюс $C^\infty M$-линейные операторы, а дифференцирования – это и есть векторные поля). Для $i > 1$, нужна индукция. ■

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $R = C^\infty M$. Докажите, что **кольцо символов дифференциальных операторов на** M **изоморфно кольцу функций на** T^*M**, полиномиальных на всех слоях** $T^*_x M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $D \in \operatorname{Diff}^i(M)$ - дифференциальный оператор i-го порядка. Его **символ** это его образ в $\operatorname{Diff}^i(M)/\operatorname{Diff}^{i-1}(M) = \operatorname{Sym}^i TM$. Символ это функция на тотальном пространстве кокасательного расслоения T^*M, полиномиальная (и однородная степени i) на слоях T^*M.

Эллиптические операторы

ЗАМЕЧАНИЕ: Все рассуждения о дифференциальных операторах из $C^\infty M$ в себя можно повторить для дифференциальных операторов из расслоения в расслоение. Пространство $\operatorname{Diff}^*(\mathcal{F},\mathcal{G})$ является $\operatorname{Diff}^*(M)$-модулем с фильтрацией, и **его присоединенный градуированный модуль изоморфен $\operatorname{Sym}^* TM \otimes \operatorname{Hom}_{C^\infty M}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ (докажите это).**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если $D: \ \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ – дифференциальный оператор i-го порядка на векторных расслоениях, его **символ** – сечение векторного расслоения $\operatorname{Sym}^i TM \otimes \operatorname{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Мы будем рассматривать D как **$\operatorname{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{G})$-значную функцию на T^*M, полиномиальную (и однородную степени i) на слоях T^*M.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $D: \ \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ – дифференциальный оператор i-го порядка на векторных расслоениях одинакового ранга. Рассмотрим проекцию $\pi: \ \operatorname{Tot}(T^*M) \to M$. D называется **эллиптическим**, если его символ задает изоморфизм $\pi^*\mathcal{F} \to \pi^*\mathcal{G}$ в каждой точке $\xi \in T^*M$, лежащей вне нулевого сечения T^*M.

Эллиптические операторы второго порядка на $C^\infty\mathbb{R}^n$

ПРИМЕР: Дифференциальный оператор второго порядка на $C^\infty\mathbb{R}^n$ записывается в виде

$$D(f)f = af + \sum_i b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} c_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

где a, b_i, $c_{i,j}$ – гладкие функции, а $x_i, i = 1, ..., n$ – координаты. Тогда его символ задается функцией $\xi \to \sum_{i,j} c_{i,j}\xi_i\xi_j$, где $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in T_x^*\mathbb{R}^n$. **Этот оператор эллиптичен, если матрица $c_{i,j}$ положительно или отрицательно определена в каждой точке $\mathbb{R}^n$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: По конвенции, считается, что **эллиптический оператор второго порядка** есть оператор, у которого матрица $c_{i,j}$ **положительно определена**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Эллиптический оператор второго порядка называется **униформно эллиптическим**, если b_i ограничены в метрике, которая задается $c_{i,j}$ (для компактных многообразий это требование выполнено автоматически).

Сильный принцип максимума

ТЕОРЕМА:
(strong maximum principle for second order elliptic equations; Eberhard Hopf, 1927) Пусть M – многообразие, не обязательно компактное, а $D: C^\infty M \to C^\infty M$ – униформно эллиптический оператор второго порядка, причем $D(f) = 0$ для любой функции $f = const$. Пусть u – функция такая, что $D(u) \geqslant 0$. **Предположим, что u имеет локальный максимум в какой-то точке M. Тогда u – константа.**

Доказательство, для случая $D(u) > 0$: В координатах, оператор D записывается так:

$$Du = \sum_{i,j} A^{ij} u_{ij} + \sum_i B^i u_i,$$

где u_{ij} – матрица вторых производных (гессиан) функции u, $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, а A^{ij} – функция со значениями в положительно определенных матрицах. В точке z максимума u, первые производные u зануляются, матрица вторых производных неположительно определена, и поэтому $Du|_z = \sum_{i,j} A^{ij} u_{ij}|_z \leqslant 0$, что противоречит $Du > 0$. **Поэтому такая функция u не может иметь максимума.**

Слабый принцип максимума

Сильный принцип максимума – трудная теорема. Сначала я докажу **слабый принцип максимума**, а потом выведу из него сильный.

ТЕОРЕМА: (Слабый принцип максимума)
Пусть $D: \ C^\infty M \to C^\infty M$ – эллиптический оператор второго порядка. причем $D(f) = 0$ для функции $f = const$. Рассмотрим область $\Omega \subset M$, замыкание которой компактно. **Тогда любое решение неравенства $D(u) \geqslant 0$ достигает максимума $\sup_\Omega u$ на границе $\partial\Omega$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть z – точка, где u достигает максимума, а x_i – координаты в окрестности $U \ni z$, $U \cong \mathbb{R}^n$. Отождествим z с $0 \in \mathbb{R}^n$. Выберем область $\Omega \Subset \mathbb{R}^n$, которая содержится в шаре $B_r(0)$ радиуса $r < 1$. **Достаточно доказать, что $u(z) = u(v)$ для какой-то точки z на $\partial\Omega$.**

Шаг 1: Если мы добавим к u решение φ неравенства $D\varphi > 0$, **максимум $u + \varphi$ будет всегда достигаться на границе Ω,** в силу сильного принципа максимума для $Du > 0$.

Слабый принцип максимума (продолжение)

Шаг 1: Если мы добавим к u решение φ неравенства $D\varphi > 0$, **максимум $u+\varphi$ будет всегда достигаться на границе Ω,** в силу сильного принципа максимума для $Du > 0$.

Шаг 2: Нам нужна функция φ, определенная на Ω, и такая, что $D\varphi > 0$, то есть $B^i\varphi_i < A^{ij}\varphi_{ij}$ везде на Ω. **В качестве φ можно выбрать функцию εe^{cx_1}, где c выбрано, чтобы выполнялось $A^{1,1}c > |b^1|$.** Тогда $D(\varphi) = A^{1,1}c^2e^{cx_1} + b^1ce^{cx_1} > 0$.

Шаг 3: Поскольку максимум $u + \varepsilon e^{cx_1}$ достигается на границе $\partial\Omega$ для любого $\varepsilon > 0$, **мы получаем, что $\sup_\Omega u$ достигается на границе $\partial\Omega$.**

■

Лемма Хопфа

ЛЕММА: (лемма Хопфа) Пусть

$$D(u) = \sum_{i,j} A^{ij} u_{ij} + \sum_i B^i u_i$$

эллиптический оператор на замкнутом шаре $B \subset \mathbb{R}^n$, а u – гладкая в B функция, такая, что $D(u) \geqslant 0$. Предположим, что u достигает максимума на точке z_0 границы ∂B, причем внутри шара $u < u(z_0)$. **Тогда производная u по радиальному вектору в точке z положительна: $\operatorname{Lie}_{\vec{r}} u > 0$.**

Доказательство: Предположим, для упрощения обозначений, что шар B единичный, $u|_B \leqslant 0$, и $u(z_0) = 0$.

Шаг 1: Рассмотрим неотрицательную на B функцию $v \in C^\infty B$, заданную формулой $v(x) = e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha}$, где $\alpha > 0$ – вещественное число. Тогда

$$D(v)|_x = \alpha^2 e^{-\alpha r(x)^2} \sum A^{ij} x_i x_j + e^{-\alpha r(x)^2} (\alpha\zeta + \xi),$$

где $\zeta, \xi \in \mathbb{C}^\infty B$ – ограниченные функции на B, не зависящие от α. Поэтому, **для достаточно больших α, имеет место $D(v) > 0$ в области $\Omega = B \backslash B'$,** где $B' \subset B$ – шар с центром в 0 и радиусом $r_0 < 1$.

Лемма Хопфа (продолжение)

Шаг 1: Рассмотрим неотрицательную на B функцию $v \in C^\infty B$, заданную формулой $v(x) = e^{-\alpha|x|^2} - e^{-\alpha}$, где $\alpha > 0$ – вещественное число. Тогда

$$D(v)|_x = \alpha^2 e^{-\alpha r(x)^2} \sum A^{ij} x_i x_j + e^{-\alpha r(x)^2}(\alpha\zeta + \xi),$$

где $\zeta, \xi \in \mathbb{C}^\infty B$ – ограниченные функции на B, не зависящие от α. Поэтому, **для достаточно больших α, имеет место $D(v) > 0$ в области $\Omega = B\backslash B'$,** где $B' \subset B$ – шар с центром в 0 и радиусом $r_0 < 1$.

Шаг 2: Для достаточно маленького $\varepsilon > 0$, имеем $u + \varepsilon v < 0$ в B', потому что $u < \delta < 0$ в B'. Поскольку $v = 0$ на границе B, из слабого принципа максимума следует, что $u + \varepsilon v < 0$ в Ω, и достигает максимума в z_0. Значит, **производная $\operatorname{Lie}_{\vec{r}}(u + \varepsilon v)|_{z_0} \geqslant 0$.**

Шаг 3: Вычислением проверяется $\operatorname{Lie}_{\vec{r}} v|_{z_0} < 0$, что дает $\operatorname{Lie}_{\vec{r}} u|_{z_0} > 0$. ■

Сильный принцип максимума (доказательство)

ТЕОРЕМА:
(strong maximum principle for second order elliptic equations; Eberhard Hopf, 1927) Пусть M – многообразие, не обязательно компактное, а $D : C^\infty M \to C^\infty M$ – униформно эллиптический оператор второго порядка, причем $D(f) = 0$ для любой функции $f = const$. Пусть u – функция такая, что $D(u) \geqslant 0$. **Предположим, что u имеет максимум в какой-то точке M. Тогда u – константа.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть локальный максимум функции u достигается в точке $z \in M$, а $Z := \{m \in M \mid u(m) = u(z)\}$. Если u не постоянно, то **всегда существует шар, внутренность которого не пересекает Z, а граница пересекает.** Выберем этот шар таким образом, что $u < u(z)$ внутри B.

Шаг 2: Поскольку производная u в z_0 ненулевая (по лемме Хопфа),**это никак не может быть локальный максимум:** противоречие. ∎

Метрики Годушона

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть ω - эрмитова форма комплексного эрмитова многообразия M, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$. Метрика на M называется **метрикой Годушона**, если $\partial\overline{\partial}(\omega^{n-1}) = 0$.

ТЕОРЕМА: (П. Годушон, 1977) Пусть (M, ω) – компактное, комплексное, эрмитово n-мерное многообразие. Тогда **существует единственная** (с точностью до постоянного множителя) **положительная функция $\psi \in C^\infty M$ такая, что $\psi\omega$ - метрика Годушона.**

Доказательство теоремы Годушона следует из сильного принципа максимума и теоремы об индексе для эллиптических операторов (в следующей лекции будет).