7. Комплексные поверхности, лекция 7: Соответствие Кобаяши-Хитчина и теорема Богомолова.

7.1. Сигнатура и числа Ходжа поверхности

Обозначим за $h^{p,q} := \dim H^q(\Omega^p M)$ числа Ходжа многообразия M, за $b_i := \dim H^i(M)$ его числа Бетти.

Из аргументов, приведенных в лекции 4, легко получить следующее утверждение (попробуйте доказать его самостоятельно).

Утверждение 7.1: ("Вырождение спектральной последовательности Фрелихера") Пусть M – компактная комплексная поверхность. Тогда $b_i = \sum_{p+q=i} h^{p,q}$.

Доказательство: Для $i = 1$ это утверждение доказано в лекции 4, для $i = 3$ оно следует из двойственности Серра и Пуанкаре. Для $i = 2$, оно следует из уже доказанного равенства для $i = 1, 3$, и выражения

$$c_2(M) = \sum (-1)^{p+q} h^{p,q} = \sum (-1)^i b_i.$$

которое легко следует из того, что комплекс пучков $(\bigoplus_i \Omega^i(M), \partial)$ является резольвентой для тривиального пучка на M, а эйлерова характеристика пучка равна эйлеровых характеристике его резольвенты (докажите это). ■

Замечание 7.2. Легко видеть, что каждый класс когомологий $\alpha \in H^2(M)$ может быть представлен как сумма замкнутой (2,0)-формы, (1,1)-формы и (0,2)-формы (докажите это).

Формула Ходжа для сигнатуры многообразия выводится из формулы индекса Атьи-Зингера, и дает следующее выражение для сигнатуры:

$$\tau(M) = \sum_{p,q} (-1)^q h^{p,q}.$$

Для некэлерова многообразия, $h^{0,1} = h^{1,0} + 1$. что дает $\tau(M) = 2h^{2,0} - h^{1,1}$. На замкнутых (2,0)- и (0,2)-формах, форма пересечения, очевидно, положительна:

$$\int_M \alpha\wedge\bar\alpha = \int_M |\alpha|^2\omega^2$$

(в силу соотношений Ходжа-Римана). А поскольку $\tau(M)=2h^{2,0}-h^{1,1}$, это значит, что на подпространстве $H^{1,1}(M)\subset H^2(M)$ классов, представленных замкнутыми (1,1)-формами, форма пересечения отрицательно определена.

Мы получили следующий полезный факт

Утверждение 7.3: Пусть M некэлерова комплексная поверхность, а $\alpha\in\Lambda^{1,1}(M)$ - замкнутая (1,1)-форма. Тогда $\int_M \alpha\wedge\bar\alpha\leqslant 0$, причем равенство возможно, только если форма α точная. ■

Пусть $\theta,\xi\in H^0(\Omega^1 M)$ - голоморфные 1-формы. Тогда $\theta\wedge\bar\xi$ - замкнутая (1,1)-форма, и в силу предыдущего утверждения

$$\int \theta\wedge\bar\xi\wedge\bar\theta\wedge\xi = \int_M |\theta\wedge\xi|^2\omega^2\leqslant 0,$$

что дает $\theta\wedge\xi=0$. Мы получили

Следствие 7.4: Пусть M некэлерова комплексная поверхность, а $\theta,\xi\in H^0(\Omega^1 M)$ - голоморфные 1-формы. Тогда $\theta\wedge\xi=0$. ■

7.2. Поверхности с $b_1>1$

Для кэлерова многообразия M определено отображение Альбанезе в $b_1(M)$-мерный комплексный тор. Если многообразие M некэлерово, существует аналог этого отображения, который определяется следующим образом.

Рассмотрим естественное вложение

$$H^0_d(\Omega^1 M)\hookrightarrow H^1(M)$$

пространства замкнутых, голоморфных 1-форм в когомологии, и пусть

$$H_1(M)\longrightarrow H^0_d(\Omega^1 M)^*$$

– двойственное отображение. Взяв композицию с естественным гомоморфизмом

$$\pi_1(M)\longrightarrow \pi_1(M)/[\pi_1(M),\pi_1(M)] = H_1(M,\mathbb{Z})\longrightarrow H_1(M),$$

получаем гомоморфизм $\pi_1(M) \xrightarrow{\Phi} H^0_d(\Omega^1 M)^*$.

Пусть $\tilde{M} \xrightarrow{\pi}$ - накрытие M, такое, что $\pi^*\alpha$ точно для любой замкнутой, голоморфной 1-формы. В таком случае, $\pi^*\alpha = d\phi$, где ϕ – голоморфная функция на $\tilde{M}$.

Выберем подпространство $V \subset H^0(\mathcal{O}_{\tilde{M}})$ голоморфных функций, таким образом, что дифференциал де Рама

$$d: \ V \longrightarrow \Omega^1(\tilde{M})$$

отображает V изоморфно на пространство $\pi^* H^0_d(\Omega^1 M)$ замкнутых, голомордных 1-форм, поднятых с M. Естественное спаривание задает отображение

$$\tilde{M} \xrightarrow{a} V^* = H^0_d(\Omega^1 M)^*. \qquad (7.2.1)$$

Это отображение эквивариантно относительно действия группы $\pi_1(M)$, действующей на $H^0_d(\Omega^1 M)^*$ по формуле $\gamma(x) = x - \Phi(\gamma)$ (проверьте это).

Замечание 7.5. Мы получили голоморфное отображение

$$M \xrightarrow{Alb} H^0_d(\Omega^1 M)^*/\Phi,$$

где $H^0_d(\Omega^1 M)^*/\Phi$ рассматривается как комплексное, собственное, нехаусдорфово многообразие. Это некэлеров аналог отображения Альбанезе. Его дифференциал вычисляется явно по формуле $d\,Alb(x) = \lrcorner\, x$, где $x \in T_m M$ касательный вектор, а $\lrcorner\, x \in H^0_d(\Omega^1 M)^*$ форма, переводящая $\theta \in H^0_d(\Omega^1 M)$ в $\langle \theta, x\rangle$.

Теорема 7.6: Пусть M - некэлерова поверхность с $b_1 > 1$. Тогда M допускает эллиптическое слоение.

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $b_1 \geqslant 3$, пространство голоморфных 1-форм на M непусто. Пусть $\Sigma \subset TM$ – подпучок касательных полей, на которых зануляются все сечения $\Omega^1 M$. В силу Следствия 7.4, Σ имеет ранг 1.

Шаг 2: Рассмотрим отображение Альбанезе

$$M \xrightarrow{Alb} H^0_d(\Omega^1 M)^*/\Phi,$$

построенное выше. Слои этого отображения компактны, потому что M компактно, и имеют коразмерность 1, потому что лежат в Σ.[1] Значит,

[1] Это следует из (7.2.1).

эти слои – кривые. Пусть C – общая кривая в семействе $\mathcal{S}$ кривых, полученных таким образом. Тогда $(C, C) = (C, C') \geqslant 0$, где C' - другая кривая в том же семействе. С другой стороны, $(C, C) \leqslant 0$ для любой некэлеровой поверхности, как доказано в лекции 1. Значит, $(C, C) = 0$, и любые две кривые в семействе $\mathcal{S}$ не пересекаются. База этого семейства собственно отображается на образ M в $H^0_d(\Omega^1 M)^*/\Phi$, значит, она компактна.

Шаг 3: Мы получили, что M расслаивается над кривой, значит, имеет алгебраическую размерность 1. В Лекции 1 доказано, что поверхность, которая имеет алгебраическую размерность 1, обязательно допускает эллиптическое слоение. ■

7.3. Поверхности класса VII с $b_2 = 0$.

Факты о поверхностях класса VII, приведенные ниже, доказаны Кодаирой и Инуэ (см. [I] и ссылки на работы Кодаиры, которые там содержатся). Доказательства Кодаиры и Инуэ опираются на классификацию Кодаиры комплексных поверхностей.

Напомним, что **поверхностью класса VII** называется поверхность размерности Кодаиры $-\infty$ (то есть без сечений плюриканонического класса) и с $b_1 = 1$.

Перечислим вещи, которые сразу вытекают из $b_1 = 1$, $b_2 = 0$. в результате применения общих результатов топологии 4-мерных многообразий. Стандартные факты о топологии поверхностей можно найти в "Семинарах Артура Бессе (1978-79)" ([B]) и в чудесном обзоре Тюрина [Ту].

Пусть M - поверхность с $b_1 = 1$, $b_2 = 0$. Поскольку топологическая эйлерова характеристика $\sum_i (-1)^i \dim H^i(M)$ равна $c_2(M)$,

$$2b_0 - 2b_1 - b_2 = c_2(M) = 0.$$

Формула Римана-Роха, доказанная в алгебраической ситуации Хирцебрухом, и следующая из формулы Атьи-Зингера для комплексных многообразий, выражает голоморфную эйлерову характеристику

$$\chi(B) := \sum_i (-1)^i \dim H^i(B)$$

расслоения B как полином от классов Черна $c_i(B)$ и $c_i(M)$:

$$\chi(B) = \frac{\operatorname{rk} B}{12}(c_1(M)^2 + c_2(M)) + \frac{1}{2}c_1(B)c_1(M) + \frac{1}{2}(c_1(B)^2 - 2c_2(M)).$$

Для поверхности с $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ $c_1(M) = c_1(B) = 0$, потому что $H^2(M) = 0$. Это дает $\chi(B) = -c_2(B)$. В частности, расслоение голоморфных i-форм и тривиальное расслоение имеют нулевую голоморфную эйлерову характеристику.

Это позволяет определить числа Ходжа $h^{p,q} = \dim H^q(\Omega^p M)$, следующим образом. В силу двойственности Серра, $h^{p,q} = h^{2-p,2-q}$, а $h^{0,0} = h^{2,2} = 1$ потому, что любая голоморфная функция на M - константа. На поверхности, таким образом, есть 4 нетривиальных числа Ходжа

$$h^{1,0}, h^{0,1}, h^{0,2}, h^{1,1},$$

через которые выражаются все остальные.

Легко видеть, что $h^{2,0} = 0$. В самом деле, голоморфные $(2,0)$-формы замкнуты, а, в силу $b_2(M) = 0$, точны, и удовлетворяют $\int_M \alpha \wedge \bar\alpha = \int_M |\alpha|^2 \omega^2$ (проверьте это). С другой стороны, интеграл от точной формы $\int_M \alpha \wedge \bar\alpha$ равен нулю по формуле Стокса.

В силу того, что M некэлерово, $b_1(M) = 2h^{1,0} + 1$, а $h^{0,1} = h^{1,0} + 1$ (выведите это из фактов, доказанных на лекции 4). Мы получаем $h^{1,0} = 0$, а $h^{0,1} = 1$. Формула Римана-Роха-Хирцебруха дает

$$0 = \chi(\Omega^1 M) = h^{1,0} - h^{1,1} + h^{1,0} = -h^{1,1},$$

значит, $h^{1,1} = 0$.

Мы доказали следующую полезную теорему, принадлежащую Кодаире.

Теорема 7.7: Пусть M - компактная комплексная поверхность с $b_1 = 1$, $b_2 = 0$. Тогда все числа Ходжа M равны нулю, кроме

$$h^{0,0} = h^{2,2} = h^{0,1} = h^{2,1} = 1.$$

Кроме того, $c_2(M) = 0$. ∎

Следующее предложение приводится в работе Инуэ со ссылкой на классификацию Кодаиры. С помощью теоремы Бухсдаля-Ламари можно получить прямое доказательство.

Утверждение 7.8: Конечное неразветвленное k-листное накрытие $\tilde M$ поверхности M без кривых и с $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ имеет $b_1 = 1$, $b_2 = 0$.

Доказательство. Шаг 1: Топологическая эйлерова характеристика такого накрытия выражается по формуле Гаусса-Бонне как интеграл от некоторого полинома от кривизны, значит, $c_2(\tilde M) = kc_2(\tilde M) = 0$. Поэтому $b_2(\tilde M) = 2b_1(\tilde M) - 2$.

Шаг 2: $\tilde{M}$ не кэлерово. Действительно, кэлерову метрику можно усреднить по группе Γ монодромии накрытия, и получить Γ-инвариантную кэлерову метрику, которая поднимается с кэлеровой метрики на M.

Шаг 3: В начале лекции было доказано, что некэлерова поверхность с $h^{1,0}(\tilde{M}) > 0$ содержит кривые. Поскольку образ кривой при конечном накрытии снова кривая, из этого следовало бы, что M тоже содержит кривые. А коль скоро $\tilde{M}$ кривых не содержит, имеем $h^{1,0}(\tilde{M}) = 0$ и $b_1(\tilde{M}) = 1$. Поэтому $b_2(\tilde{M}) = 2b_1(\tilde{M}) - 2 = 0$. ■

7.4. Плоские связности и линейные расслоения

Определение 7.9. Связность $\nabla : \ B \longrightarrow B \otimes \Lambda^1(M)$ на голоморфном расслоении **согласована с голоморфной структурой**, если ее $(0,1)$-часть $\nabla^{0,1}\ B \longrightarrow B \otimes \Lambda^{0,1}(M)$ зануляется на голоморфных сечениях B. В этом случае $\nabla^{0,1}$ обозначается $\bar\partial$ и называется **оператором голоморфной структуры**.

Определение 7.10. Пусть (M,ω) - комплексное, компактное n-мерное эрмитово многообразие, а B - голоморфное расслоение на M. Для каждой эрмитовой метрики на B определена единственная эрмитова связность $\nabla : \ B \longrightarrow B \otimes \Lambda^1(M)$, $(0,1)$-часть которой зануляется на голоморфных сечениях (докажите это). Такая связность называется **связность Черна** на B.

Утверждение 7.11: (Кодаира) Любое голоморфное линейное расслоение L на поверхности M с $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ имеет единственную плоскую связность, согласованную с голоморфной структурой.

Доказательство: Воспользуемся тем, что группа $H^{1,1}_{BC}(M)$ одномерна, и дифференциал де Рама индуцирует изоморфизм $H^{0,1}(M) \stackrel{d}{\longrightarrow} H^{1,1}_{BC}(M)$ (Лекция 6). Значит, для каждой замкнутой $(1,1)$-формы Θ найдется ∂-замкнутая $(1,0)$-форма α такая, что $d\alpha = \Theta$. Применим этот аргумент к форме Θ кривизны связности Черна ∇ на L, и пусть $\nabla_1(l) := \nabla(l) - l \otimes \alpha$. Тогда

$$\nabla_1^2 = \nabla_1^2 - d\alpha = \Theta - \Theta = 0,$$

а $(0,1)$-часть ∇_1 такая же, как у ∇, потому что α – (1,0)-форма. Единственность такой связности мы оставляем как упражнение читателю. ■

Следствие 7.12: Пусть M – комплексная поверхность с $b_1 = 1$, $b_2 = 0$. Тогда $\operatorname{Pic}(M)$ изоморфен группе гомоморфизмов $\operatorname{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{C}^*)$. ■
Следствие 7.13: Пусть M – поверхность с $b_1 = 1$, $b_2 = 0$. Тогда плюриканоническое расслоение K_M^i нетривиально для любого $i \neq 0$. В самом деле, если K_M^i тривиален, монодромия соответствующей плоской связности – кручение, и после перехода к i-листному накрытию, получаем комплексную поверхность $\tilde{M}$ с $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ и тривиальным каноническим расслоением. Это невозможно, потому что $h^{2,0}(\tilde{M}) = 0$ (докажите это).

Определение 7.14. Пусть L - линейное расслоение на поверхности с $b_1 = 1$, $b_2 = 0$. Оно называется **вещественным**, если при изоморфизме $\operatorname{Pic}(M) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{C}^*)$, линейное расслоение L переходит в вещественнозначный гомоморфизм $\operatorname{Pic}(M) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{R}^*)$.

7.5. Фильтрованные когерентные пучки и теорема Богомолова.

Определение 7.15. Пусть M - комплексное многообразие, F – когерентный пучок. Тогда F называется **фильтрованным**, если существует последовательность когерентных подпучков

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n = F,$$

причем $\operatorname{rk} F_i / F_{i-1} = 1$.

Замечание 7.16. Фильтруемые когерентные подпучки образуют полную, замкнутую подкатегорию в категории когерентных пучков.

Замечание 7.17. На алгебраическом многообразии, все когерентные пучки, очевидно, фильтрованные.

Замечание 7.18. На общей неалгебраической К3-поверхности,

$$H^{1,1}(M) \cap H^2(M, \mathbb{Z}), \quad H^1(M) = 0,$$

и, следовательно, все линейные расслоения на ней тривиальны (проверьте это). Из этого легко следует, что каждое стабильное[1] расслоение на такой поверхности нефильтруемо (проверьте).

[1] О стабильности расслоений, см. чуть ниже.

Замечание 7.19. На многообразии Калаби-Экмана, любой когерентный пучок является фильтруемым.

Кодаира (в середине 1960-х) доказал, что любая поверхность с $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, на которой существует комплексная кривая, является поверхностью Хопфа (фактором $\mathbb{C}^2\backslash 0$ по $\mathbb{Z}$, которая действует голоморфными автоморфизмами). Инуэ (1974) дал классификацию поверхностей с $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, без комплексных кривых и с фильтруемым касательным расслоением. Получилось три счетных семейства комплексных поверхностей, параметризованных решениями диофантова уравнения. Эти поверхности называются "поверхностями Инуэ".

Богомолов в 1976-м опубликовал доказательство того, что у любой поверхности с $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ фильтруемое касательное расслоение. Таким образом Богомолов завершил работу по классификации поверхностей с $b_1 = 1$, $b_2 = 0$. Доказательство Богомолова не вполне понятное, возможно, даже неправильное, и теорему Богомолова потом много раз передоказывали в 1990-е годы, сначала Ли-Яу-Жень (неправильно), потом Телеман и независимо Ли-Яу-Жень получили правильное доказательство, используя идеи Богомолова и методы калибровочной теории.

Следующее вспомогательное утверждение в литературе называется "теорема Бомбьери", см. [I].

Лемма 7.20: Пусть M - поверхность с $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, без комплексных кривых, и с нефильтруемым касательным расслоением. Тогда каноническое расслоение K_M вещественно.

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $\Omega^1 M$ не фильтруется,

$$H^0(\Omega^1 M \otimes L) = H^0(TM \otimes L) = 0$$

для любого линейного расслоения L. По формуле Римана-Роха, $\chi(TM \otimes L) = 0$, значит,

$$H^1(\Omega^1 M \otimes L) = H^1(TM \otimes L) = 0.$$

Шаг 2: Если к тому же $L \neq K_M^{-1}, \mathcal{O}_M$, то $H^0(L) = H^2(L) = 0$ в силу того, что на M нет кривых (проверьте это). По тому же самому аргументу, $H^1(L) = 0$.

Шаг 3: Рассмотрим плоскую связность ∇_L на L; она существует, и единственна, как доказано выше. Пусть $\mathbb{C}(L)$ - пучок локально постоянных относительно связности сечений L. Мы получаем такую точную последовательность, где буквы $L, \Omega^1(M) \otimes LK_M \otimes L$ обозначают пучки голоморфных сечений.

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}(L) \hookrightarrow L \xrightarrow{\partial} \Omega^1(M) \otimes L \xrightarrow{\partial} K_M \otimes L \longrightarrow 0. \tag{7.5.1}$$

В этом комплексе, оператор $\partial := \nabla^{1,0}$ определяется из (1,0)-части связности ∇_L по формуле Лейбница; он переводит голоморфные сечения в голоморфные, потому что ∇ плоская. Если $L \neq \mathcal{O}_M, K_M, K_M^{-1}$, то когомологии пучков $L, \Omega^1(M) \otimes L, K_M \otimes L$ равны нулю, и этот комплекс является ацикличной резольвентой для $\mathbb{C}(L)$. Поэтому в таком случае $H^i(\mathbb{C}(L)) = 0$ для всех i.

Шаг 4: Для $L = K_M$, резольвента (7.5.1) ациклична во всех членах, кроме L (проверьте), значит, $H^i(\mathbb{C}(K_M)) = H^i(K_M)$. Мы получаем $H^i(\mathbb{C}(K_M)) = \mathbb{C}$ для $i = 1, 2$, и нулю во всех остальных случаях

Шаг 5: Двойственность Пуанкаре с коэффициентами в локальной системе дает $H^i(\mathbb{C}(L)) \cong H^{4-i}(\mathbb{C}(L)^*)$. Значит, $H^i(\mathbb{C}(K_M^{-1})) = \mathbb{C}$ для $i = 2, 3$, и нулю во всех остальных случаях

Шаг 6: Легко видеть, что $\mathbb{C}(K_M) = \mathbb{C}(\bar{K}_M)$, где $\bar{K}_M$ это комплексно сопряженное расслоение к каноническому (проверьте это). Из шагов 4 и 5 доказательства следует, что $H^i(\mathbb{C}(K_M)) \neq H^i(\mathbb{C}(K_M^{-1})) = 0$. Значит, $\bar{K}_M$ не изоморфно K_M^{-1}. Значит, $\bar{K}_M$ изоморфно K_M (шаг 3). ■

7.6. Соответствие Кобаяши-Хитчина

Доказательство соответствия Кобаяши-Хитчина можно найти в книге Любке-Телемана [LT1] (см. также [LT2]). Его также называют теорема Дональдсона-Уленбек-Яу, по имени Дональдсона (доказавшего это соответствие для проективных поверхностей) и Уленбек-Яу, чье доказательство работает для любого кэлерова многообразия. Для поверхностей с метрикой Годушона, соответствие Кобаяши-Хитчина доказано Бухсдалем, для комплексных многообразий любой размерности - Ли и Яу ([LY]).

В этом разделе (M, ω) - комплексное эрмитово многообразие, снабженное метрикой Годушона.

Замечание 7.21. Для двух разных метрик h и h_1 на B, соответствующие формы кривизны для связности Черна соотносятся как

$$\Theta_h = \Theta_{h_1} + \nabla\nabla^c \log(hh_1^{-1}),$$

где $\log(hh_1^{-1})$ - сечение $\operatorname{End}(B)$, полученное логарифмированием $\operatorname{End}(B)$-значной функции hh_1^{-1}, где $\nabla^c = -I\nabla I$, а ∇ - оператор связности, продолженный по формуле Лейбница до оператора

$$\nabla: \ B \otimes \Lambda^i(M) \longrightarrow B \otimes \Lambda^{i+1}(M).$$

Выведите вышеприведенную формулу для кривизны.

Замечание 7.22. Из этой формулы следует

$$\operatorname{Tr}\Theta_h = \operatorname{Tr}\Theta_{h_1} + dd^c \operatorname{Tr}\log(hh_1^{-1}),$$

где Tr – отображение следа, переводящее $\operatorname{End}(B)$-значные формы в $C^\infty(M)$-значные. Поэтому

$$\int_M \operatorname{Tr}\Theta_h \wedge \omega^{n-1} = \int_M \operatorname{Tr}\Theta_{h_1} \wedge \omega^{n-1}.$$

не зависит от выбора h. Это число $\deg_\omega B$ называется **степенью** расслоения B.

Замечание 7.23. В кэлеровой ситуации, степень является топологическим инвариантом. Для некэлерова многообразия, $\deg_\omega B$ является инвариантом голоморфной структуры на B. Для кэлерова многообразия, $\deg_\omega B$ может принимать дискретный набор значений. Для некэлерова многообразия, $\deg_\omega B$ может принимать континуальное множество значений.

Упражнение 7.24: Пусть F - когерентный пучок без кручения на M, а $M' \xrightarrow{\psi} M$ - раздутие, для которого $\psi^* F$ гладкое расслоение. Докажите, что

$$\deg_\omega F := \int_{M'} \operatorname{Tr}\Theta_{\psi^* F} \wedge \psi^*\omega^{n-1}$$

не зависит от выбора ψ.

Определение 7.25. Пусть B - голоморфное расслоение. Подпучок $F \subset B$ ранга $\operatorname{rk} F < \operatorname{rk} B$ называется **дестабилизирующим**, если $\operatorname{slope}(F) \geqslant \operatorname{slope}(B)$, где slope (наклон) пучка определяется формулой

$$\operatorname{slope}(F) := \frac{\deg_\omega F}{\operatorname{rk} F}.$$

Расслоение B называется **стабильным**, если в нем нет дестабилизирующих подпучков, и **полистабильным**, если $B = \bigoplus_i B_i$, где все B_i стабильные расслоения с $\operatorname{slope}(B) = \operatorname{slope}(B_1) = \operatorname{slope}(B_2) = ...$

Определение 7.26. Эрмитова связность на голоморфном расслоении B называется **связностью Янг-Миллса**, если кривизна Θ_B удовлетворяет $\Lambda\Theta_B = \mathsf{const}\,\mathsf{Id}_B$, где

$$\Lambda: \ \Lambda^{1,1}(M) \otimes \operatorname{End} B \longrightarrow \operatorname{End} B \tag{7.6.1}$$

оператор, двойственный к $\eta \longrightarrow \eta \wedge \omega$.

Замечание 7.27. Константа из формулы 7.6.1 выражается через наклон $\mathsf{slope}(B)$ как $\mathsf{const} = \frac{1}{(n-1)!}\,\mathsf{slope}\,B$ (проверьте это).

Теорема 7.28: (соответствие Кобаяши-Хитчина, см. [LT1], [LY]). Пусть B - голоморфное расслоение над компактным комплексным многообразием с метрикой Годушона. Расслоение B допускает связность Янг-Миллса тогда и только тогда, когда оно полистабильно, причем эта связность единственна

Доказательство этой теоремы весьма трудно, и мы его приводить не будем.

Замечание 7.29. Метрика Янг-Миллса на стабильном голоморфном расслоении единственна с точностью до константы, на полистабильном - единственна с точностью до константы на каждом из стабильных слагаемых.

7.7. Доказательство теоремы Богомолова

Пусть M комплексная поверхность с нефильтруемым касательным расслоением. Тогда у TM нет никаких подпучков ранга 1, и услоние стабильности выполняется автоматически. Мы получили на TM метрику Янг-Миллса.

Утверждение 7.30: ("Lübke vanishing") Пусть B - расслоение нулевой степени на поверхности, причем $c_1(B) = c_2(B) = 0$, а ∇ - связность Янг-Миллса. Тогда ∇ плоская.

Доказательство: Поскольку ∇ - связность Янг-Миллса, ее кривизна Θ примитивна, то есть ортогональна ω.

Проверьте, что для каждой примитивной, $\mathfrak{u}(B)$-значной (1,1)-формы Θ на M, $\operatorname{Tr}(\Theta^2) = -\frac{1}{2}|\Theta|^2\omega^2$ (это проверяется тем же самым вычислением, которое используется в доказательстве соотношений Ходжа-Римана на поверхности в лекции 4). Из формулы Гаусса-Бонне следует, что класс когомологий формы $\operatorname{Tr}(\Theta^2)$ выражается как

$$[\operatorname{Tr}(\Theta^2)] = 2c_2(B) - \frac{\operatorname{rk} B - 1}{\operatorname{rk} B} c_1(B)^2.$$

Поэтому

$$c_2(B) = -\frac{1}{2}\int_M |\Theta|^2\omega^2,$$

а поскольку $c_2(B) = 0$, $\Theta = 0$. ■

Замечание 7.31. Степень касательного расслоения на любом многообразии равна степени ее антиканонического класса (проверьте), значит, $TM \otimes K_M^{-1}$ имеет нулевую степень.

Применяя этот аргумент к $TM \otimes K_M$ на поверхности с $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, и пользуясь $c_2(M) = 0$ получаем плоскую унитарную связность на $TM \otimes K_M$. На расслоении K_M есть плоская связность с вещественной монодромией, согласно теореме Бомбьери. Значит, на TM есть плоская связность ∇, монодромия Γ которой лежит в $R^{>0} \cdot U(2)$. Поскольку монодромия этой связности действует на каноническом расслоении вещественными растяжениями Γ содержится в $R^{>0} \cdot SU(2)$.

Замечание 7.32. Плоская связность ∇ не имеет кручения. В этом легко убедиться, взяв на M локально базис из голоморфных векторных полей. Кручение $T: \Lambda^2 TM \longrightarrow TM$ переводит голоморфные поля в голоморфные, потому что ∇ плоская. Значот, T есть голоморфное отображение $K_M^{-1} \longrightarrow TM$. Такое отображение зануляется, потому что TM не фильтрованное.

Группа $R^{>0} \cdot SU(2)$ изоморфна $GL(1, \mathbb{H})$, а это значит, что ∇ сохраняет кватернионную структуру на M.

Определение 7.33. Пусть на многообразии M задана связность без кручения, сохраняющая операторы $I, J, K \in \operatorname{End} TM$, причем I, J, K удовлетворяют кватернионным соотношениям

$$I^2 = J^2 = IJK = -\operatorname{Id}_{TM}.$$

Тогда (M, I, J, K) называется **гиперкомплексным многообразием.**

Замечание 7.34. Связность без кручения, сохраняющая кватернионное действие $I, J, K \in \operatorname{End} TM$, восстанавливается по этим операторам однозначно. Для ее существования необходимо и достаточно, чтобы I, J, K были интегрируемыми комплексными структурами.

Мы получили такую теорему.

Теорема 7.35: Пусть M - комплексная поверхность с $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, без кривых, и с нефильтруемым касательным расслоением. Тогда M допускает гиперкомплексную структуру. ■

Мы теперь можем доказать теорему Богомолова

Теорема 7.36: Пусть M - комплексная поверхность с $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, и без кривых. Тогда касательное расслоение TM фильтруемо.

Теорема Богомолова сразу следует из классификации гиперкомплексных поверхностей (Ch. P. Boyer), которая будет получена в следующей лекции. Из нее следует следует, что любая гиперкомплексная поверхность M - это либо тор, либо K3, либо поверхность Хопфа. Поскольку M некэлерова, это поверхность Хопфа. Но на поверхности Хопфа, которая получена таким образом, есть кривые, что тоже будет доказано.

Задачи.

Задача 7.1. Пусть M - компактная комплексная поверхность с $b_2 = 0$. Докажите, что любое линейное расслоение на M допускает плоскую связность, совместимую с голоморфной структурой. Будет ли эта связность единственна?

Задача 7.2. Пусть M - поверхность Хопфа вида $\mathbb{C}^2 \backslash 0/\mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ действует умножением на константу $q \in \mathbb{C}$, $|q| > 1$. Для какой-то метрики Годушона на M докажите, что степень голоморфного расслоения может принимать любое вещественное значение.

Задача 7.3. Пусть B - голоморфное расслоение со связностью Янг-Миллса, а $B' \subset B$ подрасслоение. Докажите, что $\mathsf{slope}\, B' \leqslant \mathsf{slope}\, B$, причем из равенства следует, что B' - прямое слагаемое B.

Указание 7.37. Воспользуйтесь выражением для второй формы кривизны голоморфного подрасслоения.

Задача 7.4. Пусть M поверхность с $c_1, c_2 = 0$, и $b_1 = x$. Найдите $b_2(M)$.

Задача 7.5. Пусть M поверхность с $c_1 = 0, c_2 = \kappa$, и $b_1 = 1$. Найдите $b_2(M)$.

Задача 7.6. Пусть B - двумерное расслоение над поверхностью с $b_2 = 0$, полученное как расширение одномерных. Докажите, что B допускает плоскую связность, совместимую с голоморфной структурой.

Задача 7.7. Пусть M - поверхность с $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, а $C \subset M$ - гладкая кривая. Докажите, что она эллиптическая.

Задача 7.8. Пусть M – некэлерова поверхность, гладко расслоенная над эллиптической кривой со слоем эллиптическая кривая (такая поверхность называется **поверхность Кодаиры**). Найдите числа Бетти M.

Литература:

[B] Артур Бессе (ред.), *Четырехмерная риманова геометрия: семинар Артура Бессе (1978-1979),* изд. Мир, 1985, Москва (библиотека "Колхоз").

[I] M. Inoue, *On surfaces of class VII_0,* Inventiones math., 24 (1974), 269-310.

[LY] Li, Jun, and Yau, S.-T., *Hermitian Yang-Mills connections on non-Kahler manifolds,* in "Mathematical aspects of string theory" (S.T. Yau ed.), World Scientific Publ., London, 1987, pp. 560-573.

[LT1] Lübke, M., Teleman, A., *The Kobayashi-Hitchin correspondence*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1995. x+254 pp

[LT2] Lübke, M., Teleman, A., *The universal Kobayashi-Hitchin correspondence on Hermitian manifolds*, math.DG/0402341, 90 pages.

[Ty] А. Н. Тюрин *Алгебро-геометрические аспекты гладкости. 1. Полиномы Дональдсона*, Успехи Математических Наук, 1989, том 44, выпуск 3(267), страницы 93-143.