# 4. Комплексные поверхности, лекция 4: Поверхности с четным $b_1$ и метрики Годушона

В этой лекции $(M,\omega)$ - комплексное эрмитово многообразие, обыкновенно поверхность, а $\omega \in \Lambda^{1,1}(M)$ его эрмитова форма. Излагаемые результаты довольно общеизвестные, см. например [BPV]. Мне удалось избежать применения спектральной последовательности Фрелихера (она же Дольбо); со спектральными последовательностями то же самое доказывается несколько проще. Введение в эрмитову геометрию и топологию поверхностей (автодуальные, антиавтодуальные формы и так далее) - Бессе, "Четырехмерная риманова геометрия".

## 4.1. Примитивные и автодуальные формы на поверхности

Напомню, что 2-форма $\eta$ на четырехмерном, ориентированном римановом многообразии называется **автодуальной**, если $*\eta = \eta$, и **антиавтодуальной**, если $*\eta = -\eta$. Легко проверить, что автодуальность равносильна условию $\eta\wedge\eta = |\eta|^2 \operatorname{Vol}$, где Vol - форма риманова обьема, а $|\eta|$ евклидова норма на 2-формах, индуцированная римановой структурой. Тот же аргумент показывает, что антиавтодуальность равносильна условию $\eta\wedge\eta = -|\eta|^2 \operatorname{Vol}$, и шестимерное расслоение 2-форм разбивается в прямую двух трехмерных подрасслоений, составленных из автодуальных и антиавтодуальных форм.

**Определение 4.1.** Пусть $(M,\omega)$ - комплексное эрмитово многообразие, $L_\omega : \Lambda^{p,q}(M) \longrightarrow \Lambda^{p+1,q+1}(M)$ оператор внешнего умножения на $\omega$, а $\Lambda_\omega = *L_\omega*$ – сопряженный оператор. Форма $\eta$ называется **примитивной**, если $\Lambda_\omega(\eta) = 0$.

На комплексной поверхности, примитивная (1,1)-форма записывается довольно просто. Пусть $\xi_1, \xi_2 \in \Lambda^{1,0}(M)$ - ортонормированный базис. Тогда

$$\Lambda_\omega(\xi_1\wedge\bar\xi_1) = 1, \quad \Lambda_\omega(\xi_2\wedge\bar\xi_2) = 1, \Lambda_\omega(\xi_1\wedge\bar\xi_2) = 0, \quad \Lambda_\omega(\xi_2\wedge\bar\xi_1) = 0,$$

Из этого видно, что расслоение вещественных примитивных $(1,1)$-форм трехмерно, и порождено формами

$$\sqrt{-1}(\xi_1 \wedge \bar{\xi}_1 - \xi_2 \wedge \bar{\xi}_2,) \quad \xi_1 \wedge \bar{\xi}_2 - \sqrt{-1}\xi_2 \wedge \bar{\xi}_1, \quad \xi_2 \wedge \bar{\xi}_1 - \sqrt{-1}\xi_1 \wedge \bar{\xi}_2.$$

Легко видеть, что эти формы антиавтодуальны, то есть удовлетворяют соотношению $*\eta = -\eta$, или, что равносильно,

$$\eta \wedge \eta = -(\eta, \eta) \operatorname{Vol}.$$

Мы получили следующее полезное утверждение.
**Утверждение 4.2:** Пусть $M$ - комплексная эрмитова поверхность. 2-форма $\eta \in \Lambda^2(M)$ анти-автодуальна тогда и только тогда, когда она имеет тип $(1,1)$ и примитивна.
■

То же самое вычисление приводит к следующей формуле (соотношения Римана-Ходжа)

$$|\eta|^2 = -\frac{\eta \wedge \eta}{\operatorname{Vol}} + 2(\Lambda_\omega \eta)^2 \tag{4.1.1}$$

## 4.2. Когомологии $\mathcal{O}_M$ и метрика Годушона

Пусть $(M, \omega)$ – комплексное $n$-многообразие с метрикой Годушона, а $\alpha \in \Lambda^{0,1}(M)$ – $\bar{\partial}$-замкнутая 1-форма. Определим

$$\deg \alpha := \frac{\int_M \partial\alpha \wedge \omega^{n-1}}{\int_M \omega^n}$$

Из формулы Стокса легко видеть, что $\int_M \partial\bar{\partial} f \wedge \omega^{n-1} = 0$ для любой функции $f \in C^\infty M$ (докажите это, используя $\partial\bar{\partial}\omega^{n-1} = 0$). Поэтому $\deg \alpha = 0$, если $\alpha$ $\bar{\partial}$-точна. Мы получили, что $\deg$ задает функционал на группе когомологин $\bar{\partial}$, которая отождествляется с когомологиями $H^1(\mathcal{O}_M)$ структурного пучка $M$, потому что резольвента пучков

$$\mathcal{O}_M \xrightarrow{\bar{\partial}} \Lambda^{0,1}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Lambda^{0,2}(M) \xrightarrow{\bar{\partial}} \ldots$$

ациклична.

**Определение 4.3.** Отображение $H^1(\mathcal{O}_M) \xrightarrow{\deg} \mathbb{C}$ называется **степенью** класса когомологий.

**Замечание 4.4.** Напомню, что $(p,0)$-форма $\eta$ называется **голоморфной**, если $\bar\partial\eta = 0$. $(0,p)$-форма $\eta$ называется **антиголоморфной**, если $\bar\eta$ голоморфна. Степень замкнутой, антиголоморфной формы равна нулю. Согласно теории Ходжа, на кэлеровом многообразии каждый класс когомологий $H^1(\mathcal{O}_M)$ может быть представлен антиголоморфной, замкнутой формой. Поэтому для кэлерова многообразия отображение $H^1(\mathcal{O}_M) \xrightarrow{\deg} \mathbb{C}$ равно нулю.

**Замечание 4.5.** Отображение

$$f \xrightarrow{D} \frac{\partial\bar\partial f \wedge \omega^{n-1}}{\int_M \omega^n}$$

из функций в функции - эллиптический оператор второго порядка, зануляющийся на константах (проверьте это), и в силу теоремы, доказанной на прошлом занятии, коядро $D$ одномерно (проверьте).

**Замечание 4.6.** Образ $D$ тоже легко описать. Действительно, для каждой функции $f \in C^\infty M$, имеем

$$\int \partial\bar\partial f \wedge \omega^{n-1} = 0,$$

потому что $\partial\bar\partial(\wedge\omega^{n-1}) = 0$. Но коядро $D$ одномерно, по формуле индекса. Значит, образ $D$ - это множество всех функций $g$ таких, что $\int_M g\omega^n = 0$.

**Утверждение 4.7:** Пусть $(M,\omega)$ – комплексное $n$-многообразие с метрикой Годушона. Для любого класса когомологий $[\alpha] \in H^1(\mathcal{O}_M)$, существует единственный представитель $\alpha \in \Lambda^{0,1}(M)$ такой, что

$$\partial\alpha \wedge \omega^{n-1} = \deg[\alpha]\omega^n. \tag{4.2.1}$$

**Доказательство:** Пусть $\alpha_0 \in \Lambda^{0,1}(M)$ – представитель $[\alpha]$. Решения (4.2.1) это формы вида $\alpha_0 + \bar\partial f$, удовлетворяющие

$$\partial\bar\partial f \wedge \omega^{n-1} = \deg[\alpha]\omega^n - \partial\alpha_0 \wedge \omega^{n-1}.$$

(проверьте это). В терминах оператора $D$, определенного выше, это можно переписать как

$$D(f) = \deg[\alpha] - \frac{\partial\alpha_0 \wedge \omega^{n-1}}{\int_M \omega^n}. \qquad (4.2.2)$$

Единственность решения следует сразу из того, что ядро $D$ это константы. Существование $f$ тоже легко проверить. Как следует из предыдущего замечения, уравнение $D(f) = g$ имеет решение $f$, если $\int_M g\omega^n = 0$. Левая сторона уравнения (4.2.2) после интегрирования дает

$$\int_M \deg[\alpha]\omega^n - \int_M \partial\alpha_0 \wedge \omega^{n-1} = 0.$$

■

**Следствие 4.8:** Пусть $(M, \omega)$ - комплексная поверхность с метрикой Годушона, а $[\alpha] \in H^1(\mathcal{O}_M)$ класс когомологий с $\deg[\alpha] = 0$. Тогда $[\alpha]$ представляется антиголоморфной формой.

**Доказательство:** Пусть $\alpha \in \Lambda^{0,1}(M)$ - представитель $[\alpha]$, который удовлетворяет $\partial\alpha \wedge \omega^{n-1} = 0$, $\bar\partial\alpha = 0$ (такой представитель существует в силу предыдущего утверждения). Тогда $\partial\alpha = d\alpha$ примитивная форма. Поскольку примитивные формы антиавтодуальны, имеем

$$0 = \int_M d\alpha \wedge d\bar\alpha = -\int_M |\Re(d\alpha)|^2 \operatorname{Vol}$$

значит, $d\alpha = 0$ всюду на $M$. ■

**Замечание 4.9.** Из этого утверждения сразу следует, что фактор

$$H^1(\mathcal{O}_M)/H^1_a(\mathcal{O}_M)$$

по пространству $H^1_a(\mathcal{O}_M)$ антиголоморфных замкнутых форм не более чем одномерный.

$(2,0)$-формы на поверхности всегда автодуальны (проверьте это). Используя то же соображение, что и в следствии выше, мы сразу получаем следующее полезное утверждение.

**Замечание 4.10.** На поверхности, голоморфные (и антиголоморфные) 1-формы обязательно замкнуты. Рассмотрим голоморфную 1-форму $\rho \in \Omega^1 M$. Тогда $d\rho$ это точная $(2,0)$-форма. Но $\int_M d\rho \wedge d\bar\rho = \int_M \operatorname{Vol} |d\rho|^2 = 0$, $d\rho = 0$ всюду на $M$.

## 4.3. Комплексные поверхности с четным $b_1(M)$ и голоморфные 1-формы

**Лемма 4.11:** Ненулевая линейная комбинация антиголоморфных и голоморфных 1-форм на компактной поверхности не может быть точна.

**Доказательство:** Действительно, пусть $v$ такая линейная комбинация. Тогда $I(v)$ тоже линейная комбинация антиголоморфных и голоморфных 1-форм, и в силу замечания 4.10, $I(v)$ замкнуто. Если $v$ точно, $v = d\phi$, мы имеем $0 = dd^c\phi$, где $d^c = -I \circ d \circ I$. С другой стороны, эллиптический оператор $\phi \longrightarrow \frac{dd^c\phi\wedge\omega}{\omega^2}$ зануляется на константах (проверьте эллиптичность), значит, имеет одномерное ядро, состоящее из констант, в силу доказанного в предыдущей лекции (почему?). Мы получили $\phi = const$. ■

**Замечание 4.12.** Из этого следует, что на компактной поверхности, естественное отображение

$$H^0(\Omega^1 M) \oplus \overline{H^0(\Omega^1 M)} \longrightarrow H^1(M)$$

из голоморфных плюс антиголоморфных форм в когомологии является вложением.

**Замечание 4.13.** Пусть $v$ замкнутая 1-форма на компактном комплексном многообразии. Поскольку (1,0) и (0,1)-части $v$ замкнуты относительно $\partial$ и $\bar\partial$ соответственно, можно говорить про классы когомологий $[v^{0,1}] \in H^1(\mathcal{O}_M)$ и $\overline{[v^{1,0}]} \in H^1(\mathcal{O}_M)$. Если эти два класса равны нулю, (0,1)-формы $v^{0,1}$ и $\overline{v^{1,0}}$ $\bar\partial$-точны. Это дает

$$v = \bar\partial\phi_1 + \partial\phi_2.$$

Поскольку $v$ замкнуто, $dv = 0$ влечет $\partial\bar\partial(\phi_1 - \phi_2) = 0$. Из аргумента который доказывает предыдущую лемму, сразу следует, что $\phi_1 = \phi_2$ (проверьте это). Поэтому $V = d\phi_1$. Мы получили естественное вложение

$$H^1(M) \xhookrightarrow{j} H^1(\mathcal{O}_M) \oplus \overline{H^1(\mathcal{O}_M)}, \qquad (4.3.1)$$

где $\overline{H^1(\mathcal{O}_M)}$ обозначает векторное пространство с сопряженной комплексной структурой.

**Теорема 4.14:** Пусть $M$ - компактная комплексная поверхность. Тогда $b_1(M)$ четно, если $H^1(\mathcal{O}_M)$ порождено антиголоморфными 1-формами, и нечетно в противном случае.

**Доказательство. Шаг 1:** Выше были построены естественные вложения

$$H^0(\Omega^1 M) \oplus \overline{H^0(\Omega^1 M)} \hookrightarrow H^1(M) \overset{j}{\hookrightarrow} H^1(\mathcal{O}_M) \oplus \overline{H^1(\mathcal{O}_M)}.$$

Если $H^1(\mathcal{O}_M)$ порождено антиголоморфными 1-формами,

$$H^1(\mathcal{O}_M) = H^0(\Omega^1 M),$$

и эти вложения являются изоморфизмами.

**Шаг 2:** Напомним, что **степенью** замкнутой (1,1)-формы $\eta$ на многообразии с метрикой Годушона называется число $\int_M \eta \wedge \omega^{n-1}$.

Применив дифференциал де Рама к $\bar\partial$-замкнутой $(0,1)$-форме $\alpha$, получим точную $(1,1)$-форму $d\alpha = \partial\alpha$. На поверхности, факторпространство точных $(1,1)$-форм по $\partial\bar\partial$-точным не более чем одномерно, потому что точная $(1,1)$-форма нулевой степени равна $\partial\bar\partial\phi + v$, где $v$ точно и примитивно (Замечание 4.5), а значит равно нулю.

**Шаг 3:** Пусть $[\alpha], [\beta] \in H^1(\mathcal{O}_M)$, $\deg[\alpha] = \overline{\deg[\beta]}$. Выберем их представители $\alpha, \beta \in \Lambda^{0,1}(M)$. Тогда $\eta := d(\alpha - \bar\beta)$ - точная (1,1)-форма нулевой степени (проверьте это), и в силу предыдущего шага, $\eta = \partial\bar\partial\phi$ (проверьте). Форма $\alpha - \bar\beta - \partial\phi$ замкнута, поскольку

$$d(\alpha - \bar\beta - \bar\partial\phi) = \eta - \partial\bar\partial\phi = 0,$$

Мы получаем $[\alpha] \oplus [\beta] = j(\alpha - \bar\beta - \bar\partial\phi)$, где $H^1(M) \overset{j}{\hookrightarrow} H^1(\mathcal{O}_M) \oplus \overline{H^1(\mathcal{O}_M)}$ - отображение, построенное в (4.3.1).

**Шаг 4:** Если группа $H^1(\mathcal{O}_M)$ не порождена антиголоморфными 1-формами, существуют классы $[\alpha], [\beta] \in H^1(\mathcal{O}_M)$, такие, что $\deg[\alpha] \neq \overline{\deg[\beta]}$, потому что из $\deg[\alpha] = 0$ следует, что $\alpha \in H^1_a(\mathcal{O}_M)$. На предыдущем шаге было доказано, что $j(H^1(M)) \subset H^1(\mathcal{O}_M) \oplus \overline{H^1(\mathcal{O}_M)}$ совпадает с $\ker \deg : \ H^1(\mathcal{O}_M) \oplus \overline{H^1(\mathcal{O}_M)} \longrightarrow 0$, а поскольку это отображение нетривиально, мы получаем точную последовательность

$$0 \longrightarrow H^1(M) \ \overset{j}{\longrightarrow} \ H^1(\mathcal{O}_M) \oplus \overline{H^1(\mathcal{O}_M)} \ \overset{\deg}{\longrightarrow} \ \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

Поэтому $H^1(M)$ нечетна. ■

В доказательстве кэлеровости комплексных поверхностей с четным $b_1$, используется не сама четность, а следующее полезное свойство поверхностей с четным $b_1$.

**Лемма 4.15:** ($\partial\bar\partial$-лемма для поверхностей с четным $b_1$). Пусть $M$ - компактная комплексная поверхность, с четным $b_1(M)$, а $\eta \in \Lambda^{1,1}(M)$ – точная (1,1)-форма. Тогда $\eta = \partial\bar\partial\psi$, для какой-то функции $\psi \in C^\infty M$.

**Доказательство:** Имеем $\eta = d\rho$, значит, $\eta = \partial\rho^{0,1} + \bar\partial\rho^{1,0}$, где $\rho^{1,0}$ и $\rho^{0,1}$ - $(1,0)$ и $(0,1)$-части. Поскольку $\eta$ типа $(1,1)$, имеем

$$\partial\rho^{1,0} = \bar\partial\rho^{0,1} = 0.$$

В силу предыдущего следствия, $\partial$-замкнутая (1,0)-форма является суммой голоморфной и $\partial$-точной, а $\bar\partial$-замкнутая (0,1)-форма является суммой антиголоморфной и $\bar\partial$-точной. Отбросив антиголоморфные и голоморфные компоненты, которые не дают вклада в $\partial\rho^{0,1} + \bar\partial\rho^{1,0}$, получим

$$\rho^{1,0} = \partial\psi, \quad \rho^{0,1} = \bar\partial\phi,$$

а следовательно,

$$\eta = \partial\rho^{0,1} + \bar\partial\rho^{1,0} = \partial\bar\partial\phi - \partial\bar\partial\psi.$$

■

**Замечание 4.16.** Отметим, что такое же утверждение верно и для потоков: точный $(1,1)$-поток лежит в образе $\partial\bar\partial$. Это связано с тем, что когомологии Дольбо для потоков такие же, как для форм (докажите это).

# Задачи.

**Задача 4.1.** Пусть $V$ - евклидово пространство. Постройте естественный изоморфизм $\mathfrak{so}(V) \cong \Lambda^2(V)$, не пользуясь координатами.

**Задача 4.2.** Пусть $V$ - четырехмерное евклидово пространство. Используя изоморфизм $\mathfrak{so}(V) \cong \Lambda^2(V)$ мы получаем естественное вложение $\Lambda^2(V) \xhookrightarrow{e} \operatorname{End}(V)$. Докажите, что ненулевая форма $\eta \in \Lambda^2(V)$ автодуальна тогда и только тогда, когда $e(\eta)^2 = a\,\mathsf{Id}_V$, где $a < 0$.

**Задача 4.3.** Докажите, что $SO(4) \cong SU(2) \times SU(2)/\{\pm 1\}$.

**Задача 4.4.** Пусть $B$ – голоморфное, эрмитово векторное расслоение на компактном комплексном $n$-многообразии $(M, \omega)$ с метрикой Годушона, а $\Theta_B$ кривизна связности Черна на $B$. Определим

$$\deg B := \int_M \omega^{n-1} \wedge \Theta_B.$$

Докажите, что $\deg B$ не зависит от выбора метрики на $B$.

**Задача 4.5.** Пусть $B$ – голоморфное, эрмитово векторное расслоение на компактной комплексной поверхности с метрикой Годушона, $\Theta_B$ кривизна связности Черна на $B$, а $B' \subset B$ голоморфное подрасслоение. Предположим, что форма $\Theta_B$ антиавтодуальна. Докажите, что $\deg B' \leqslant \deg B$, причем равенство достигается, только если $B = B' \oplus B''$ для какого-то голоморфного расслоения $B''$.

**Задача 4.6.** Пусть $M$ комплексное многообразие, не обязательно компактное, а $H^1(M) \xrightarrow{j} H^1(\mathcal{O}_M) \oplus \overline{H^1(\mathcal{O}_M)}$ отображение, построенное в Замечании 4.13. Предположим, что на $M$ нет непостоянных голоморфных функций. Докажите, что $j$ - вложение.

**Задача 4.7.** Пусть $M$ - комплексное многообразие, $\operatorname{Pic}_0(M)$ - группа голоморфных линейных расслоений с тривиальным классом Черна, а $Fl(M) \subset \operatorname{Pic}_0(M)$ - группа линейных расслоений, которые допускают плоскую, унитарную связность. Постройте естественный изоморфизм между $\operatorname{Pic}_0(M)/Fl(M)$ и $H^1(\mathcal{O}_M)/H^1_a(\mathcal{O}_M)$, где $H^1_a(\mathcal{O}_M)$ - классы когомологий, представимые замкнутыми, антиголоморфными формами.

**Задача 4.8.** Пусть $m, n > 1$ - целые числа, $\alpha \in \mathbb{C} \backslash 0$. Рассмотрим действие $\mathbb{C}$ на $V := (\mathbb{C}^n \backslash 0) \times (\mathbb{C}^m \backslash 0)$ $t(x, y) = (e^t x, e^{\alpha t} y)$. Для каких $\alpha$ фактор $V$ по этому действию будет компактным многообразием?

**Замечание 4.9.** Такое многообразие называется **пространство Калаби-Экмана** (Calabi-Eckmann space).

**Задача 4.10.** Докажите, что пространство Калаби-Экмана гомеоморфно $S^{2n-1} \times S^{2m-1}$, и допускает голоморфное, гладкое отображение

$$M \longrightarrow \mathbb{C}P^{m-1} \times \mathbb{C}P^{n-1},$$

а слой этого отображения - эллиптическая кривая.

**Задача 4.11.** Пусть $M$ - многообразие Калаби-Экмана. Найдите размерность $H^0(\Omega^1 M)$.

**Замечание 4.12.** Пусть $(M,\omega)$ - комплексное эрмитово многообразие. Напомним, что $\omega$ называется KT-метрикой (от слов Kähler torsion), если $\partial\bar\partial\omega = 0$.

**Задача 4.13.** Пусть $(M,\omega)$ - компактное, комплексное 3-многообразие с KT-метрикой. Докажите, что любая голоморфная 1-форма на $M$ замкнута.

**Задача 4.14.** Пусть $(M,\omega)$ - компактное, комплексное 3-многообразие с эрмитовой метрикой, а $\alpha$ – примитивная (1,1)-форма на $M$. Докажите, что

$$\int_M \alpha \wedge \bar\alpha \wedge \omega = \mathsf{const} \int_M |\alpha|^2 \omega^3,$$

где $\mathsf{const}$ - отрицательная рациональная константа. Вычислите эту константу.

**Задача 4.15.** Пусть $(M,\omega)$ - компактное, комплексное 3-многообразие с KT-метрикой, а $\alpha$ - точная (1,1)-форма, причем $\alpha = \partial\beta$, где $\bar\partial\beta = 0$. Докажите, что

$$\int_M \alpha \wedge \bar\alpha \wedge \omega = 0.$$

**Задача 4.16.** Пусть $\alpha$ - точная, примитивная $(1,1)$-форма, причем $\alpha = \partial\beta$, где $\bar\partial\beta = 0$. Докажите, что $\alpha = 0$

**Задача 4.17.** Пусть $(M,\omega)$ - компактное, комплексное 3-многообразие с эрмитовой метрикой. Докажите, что дифференциальный оператор на функциях

$$D(\phi) = \frac{\partial\bar\partial\phi \wedge \omega^2}{\omega^3}$$

имеет одномерное коядро $K$.

**Задача 4.18.** Пусть $(M,\omega)$ - компактное, комплексное 3-многообразие с KT-метрикой, а $\nu \in \Lambda^{0,1}(M)$ $\bar\partial$-замкнутая $(0,1)$-форма. Определим $\deg\nu$ как образ $\kappa := \frac{\partial\nu\wedge\omega^2}{\omega^3}$ в $K = C^\infty(M)/\operatorname{im} D$. Докажите, что $\deg\nu$ не зависит от выбора представителя $\nu$ в его классе когомологий $[\nu] \in H^1(\mathcal{O}_M)$.

**Задача 4.19.** Пусть $(M, \omega)$ - компактное, комплексное 3-многообразие с КТ-метрикой, а $[\nu] \in H^1(\mathcal{O}_M)$ класс когомологий с $\deg[\nu] = 0$, Докажите, что класс $[\nu]$ может быть представлен антиголоморфной, замкнутой формой.

**Указание 4.20.** Решив уравнение $D(\phi) = \kappa$, докажите, что форма $\alpha := d(\nu - \bar\partial\phi)$ примитивна. Это точная, примитивная форма, причем $\alpha = \partial\beta$, где $\bar\partial\beta = 0$. Выведите из этого, что $\alpha = 0$.

**Задача 4.21.** Пусть $(M, \omega)$ - компактное, комплексное 3-многообразие с КТ-метрикой. Докажите, что

$$\dim H^1(\mathcal{O}_M)/H^1_a(\mathcal{O}_M) \leqslant 1.$$

Докажите, что $H^1(M)$ четно, если $\dim H^1(\mathcal{O}_M)/H^1_a(\mathcal{O}_M) = 0$, и нечетно, если $\dim H^1(\mathcal{O}_M)/H^1_a(\mathcal{O}_M) \neq 0$.

**Задача 4.22.** Докажите, что многообразие Калаби-Экмана, гомеоморфное $S^3 \times S^3$, не допускает КТ-метрики.

# Литература:

[BPV] Barth W., Peters C., Van de Ven A. *Compact complex surfaces*, 1984 (библиотека "Колхоз").

[B] Артур Бессе (ред.), *Четырехмерная риманова геометрия: семинар Артура Бессе (1978-1979),* изд. Мир, 1985, Москва (библиотека "Колхоз").