3. Комплексные поверхности, лекция 3: Сильный принцип максимума и метрики Годушона

Основы анализа на многообразиях (эллиптические операторы, спектральная теорема, фредгольмовость) излагаются, например, тут: [V]. Теорема Годушона доказана в его статье [G], ее изложение доступно в [IP]. О применении метрик Годушона к теории стабильных расслоений есть сотни статей; в качестве ссылки обыкновенно используется книга Любке и Телемана [LT]. Основная ссылка на теорию эллиптических операторов второго порядка - книга "Гилбарг и Трудингер" [GT], излюбленная аналитиками. Принцип максимума излагается там весьма понятно.

Доказывать основную теорему теории эллиптических операторов (о том, что они все фредгольмовы) мы не будем, но довольно простое доказательство ее есть тут: [V].

3.1. Символ дифференциального оператора

В этом разделе, M обозначает гладкое многообразие, не обязательно компактное.

Определение 3.1. Пусть R - кольцо над полем k. k-линейное отображение D из кольца R в R-модуль (например, в R) называется **дифференцированием**, если оно удовлетворяет правилу Лейбница:

$$D(xy) = yD(x) + xD(y)$$

Очевидно, любое векторное поле задает дифференцирование на кольце $C^\infty(M)$.

Замечание 3.2. Дифференцирования кольца $C^\infty(M)$ кольца гладких функций это векторные поля на M. Это - одно из определений векторного поля.

Упражнение 3.3: Докажите эквивалентность этого определения и других, известных вам.

Определение 3.4. Пусть R - кольцо над полем k. **Дифференциальный оператор порядка** 0 — это отображение $R \xrightarrow{v} R$, которое R-линейно, то есть переводит $r \in R$ в $v(1)r$. Множество таких операторов обозначается $\operatorname{Diff}^0(R)$. Дифференциальный оператор порядка $i > 0$ определяется индуктивно, в терминах дифференциальных операторов порядка $i-1$. А именно, считается, что k-линейное отображение $a \in \operatorname{Diff}^i(R)$, если для любого $v \in \operatorname{Diff}^0(R)$, коммутатор $[a,v]$ лежит в $\operatorname{Diff}^{i-1}(R)$. Мы имеем цепочку вложений

$$\operatorname{Diff}^0(R) \subset \operatorname{Diff}^1(R) \subset \operatorname{Diff}^2(R) \subset ...$$

Объединение всех $\operatorname{Diff}^i(R)$ называется **множеством дифференциальных операторов**. Как мы увидим немного погодя, $\operatorname{Diff}^*(R)$ образует алгебру (некоммутативное, ассоциативное кольцо с единицей). Дифференциальные операторы на кольце $C^\infty M$ называются **дифференциальными операторами на** M, и обозначаются $\operatorname{Diff}^*(M)$.

Замечание 3.5. Легко видеть, что дифференциальные операторы нулевого порядка на M - умножения на функцию, дифференциальные операторы первого порядка - сумма оператора нулевого порядка и дифференцирования (докажите это).

Замечание 3.6. Аналогичным образом определяются дифференциальные операторы из модуля над кольцом R в модуль над R. Операторы нулевого порядка - R-линейные, операторы i-го порядка - такие, коммутатор которых с любым R-линейным оператором дает дифференциальный оператор $i-1$-го порядка.

Замечание 3.7. Напомню, что проективный конечно порожденный модуль над кольцом – это прямое слагаемое свободного модуля. Векторные расслоения на гладком многообразии можно рассматривать как $C^\infty M$-модули, отождествляя расслоение с пространством его сечений. Векторные расслоения на конечных CW-пространствах часто определяются как проективные модули над кольцом $C^\infty M$ (докажите, что это определение равносильно любому известному вам). В такой ситуации, дифференциальные операторы из одного расслоения в другое можно определить как дифференциальные операторы на соответствующих $C^\infty M$-модулях.

Определение 3.8. (Возрастающая) фильтрация на векторном пространстве V есть последовательность подпространств $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset$

... таких, что $\bigcup V_i = V$. **Фильтрованная алгебра** это алгебра A с фильтрацией $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset ...$ такая, что $A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$.

Замечание 3.9. Композиция дифференциальных операторов i-го и j-го порядка имеет порядок $\leqslant i+j$ (докажите это). Это задает фильтрацию

$$\operatorname{Diff}^0(R) \subset \operatorname{Diff}^1(R) \subset \operatorname{Diff}^2(R) \subset ...$$

на кольце дифференциальных операторов над R.

Упражнение 3.10: Пусть $D^i \in \operatorname{Diff}^i(R)$, $D^j \in \operatorname{Diff}^j(R)$ - дифференциальные операторы. Докажите, что их коммутатор $[D^i, D^j]$ лежит в $\operatorname{Diff}^{i+j-1}(R)$.

Указание 3.11. Воспользуйтесь индукцией и тождеством

$$[v, D^i D^j] = [v, D^i]D^j + D^i[v, D^j]$$

Определение 3.12. Пусть $A = \bigcup_i A_i$ - ассоциативная алгебра с фильтрацией. Рассмотрим пространство $\bigoplus_i A_i/A_{i-1}$. Определим умножение на $\bigoplus_i A_i/A_{i-1}$ таким образом, чтобы произведение классов $a \mod A_{i-1}$ и $b \mod A_{j-1}$ давало $ab \mod A_{i+j-1}$. Это задает структуру градуированной ассоциативной алгебры на $\bigoplus_i A_i/A_{i-1}$ (докажите это). Такая алгебра называется **присоединенной градуированной алгеброй** фильтрованной алгебры A.

Замечание 3.13. Из Упражнения 3.10 легко вывести, что присоединенная градуированная алгебра к алгебре дифференциальных операторов коммутативна. Эта алгера называется **кольцом символов дифференциальных операторов**.

Упражнение 3.14: Рассмотрим факторпространство

$$\operatorname{Diff}^i(M)/\operatorname{Diff}^{i-1}(M)$$

как модуль над $C^\infty M$. Докажите, что оно изоморфно пространству сечений расслоения $\mathsf{Sym}^i TM$ – i-й симметрической степени касательного расслоения.

Указание 3.15. Для $i = 1$, это утверждение очевидно из явного описания дифференциальных операторов первого порядка (это дифференцирования плюс $C^\infty M$-линейные операторы, а дифференцирования - это и есть векторные поля). Для $i > 1$, воспользуйтесь индукцией.

Упражнение 3.16: Пусть $R = C^\infty M$. Докажите, что кольцо символов дифференциальных операторов на M изоморфно кольцу функций функций на T^*M, полиномиальных на всех слоях $T^*_x M$

Указание 3.17. Это легко следует из предыдущего упражнения.

Определение 3.18. Пусть $D \in \operatorname{Diff}^i(M)$ - дифференциальный оператор i-го порядка. Его **символ** это его образ в $\operatorname{Diff}^i(M)/\operatorname{Diff}^{i-1}(M) = \operatorname{\mathsf{Sym}}^i TM$. **Главный символ дифференциального оператора** это функция на тотальном пространстве кокасательного расслоения T^*M, полиномиальная (и однородная степени i) в слоях T^*M. В дальнейшем, мы будем называть эту функцию просто **символ** D.

Замечание 3.19. Все рассуждения о дифференциальных операторах из $C^\infty M$ в себя можно повторить для дифференциальных операторов из расслоения в расслоение. Пространство $\operatorname{Diff}^*(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ является $\operatorname{Diff}^*(M)$-модулем с фильтрацией, и его присоединенный градуированный модуль изоморфен

$$\operatorname{\mathsf{Sym}}^* TM \otimes \operatorname{Hom}_{C^\infty M}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

(докажите это). Если $D: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ – дифференциальный оператор i-го порядка на векторных расслоениях, его символ – сечение векторного расслоения $\operatorname{\mathsf{Sym}}^i TM \otimes \operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Можно рассматривать символ D его как $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$-значную функцию на T^*M, полиномиальную (и однородную степени i) на слоях T^*M.

Определение 3.20. Пусть $D: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ – дифференциальный оператор i-го порядка на векторных расслоениях одинакового ранга. D называется **эллиптическим**, если его символ обратим в каждой точке $\xi \in T^*M$, лежащей вне нулевого сечения T^*M.

3.2. Фредгольмовы операторы

Определение 3.21. Пусть V_1, V_2 - пространства с нормой. Линейный оператор $E: V_1 \longrightarrow V_2$ называется **ограниченным**, если существует константа C такая, что

$$\frac{|E(v)|}{|v|} < C \tag{3.2.1}$$

для любого ненулевого $v \in V_1$.

Упражнение 3.22: Докажите, что ограниченные операторы из V_1 в V_2 образуют линейное пространство. Докажите, что оператор ограничен тогда и только тогда, когда он непрерывен в топологии, заданной нормой.

Определение 3.23. Норма ограниченного оператора определяется как инфимум всех констант C, которые удовлетворяют уравнению (3.2.1). Иначе говоря, норма $|E|$ это супремум $|E(v)|$ на единичной сфере $\{v \in V_1 \ \ | \ \ |v| = 1\}$.

Замечание 3.24. Довольно часто термин *непрерывный оператор* употребляют как синоним к *ограниченный оператор.*

Напомню, что **прекомпактным** подмножеством топологического пространства называется подмножество, замыкание которого компактно.

Определение 3.25. Пусть V_1, V_2 - пространства с нормой. Оператор E; $V_1 \longrightarrow V_2$ называется **компактным**, если образ любого ограниченного множества прекомпактен.

Определение 3.26. Ограниченный оператор $F: \ H_1 \longrightarrow H_2$ на гильбертовых пространствах называется **фредгольмовым** (Fredholm), если его образ замкнут, а ядро и коядро конечномерны.

Упражнение 3.27: Пусть $F: \ H_1 \longrightarrow H_2$ – ограниченный оператор. Докажите, что следующие утверждения равносильны.

а. • F фредгольмов

б. • Существует ограниченный оператор $G: \ H_2 \longrightarrow H_1$ такой, что $FG = \mathsf{Id}_{H_1} + K_1$, $GF = \mathsf{Id}_{H_2} + K_2$, а операторы K_1, K_2 компактны.

Упражнение 3.28: Пусть $F: \ H_1 \longrightarrow H_2$, $G: \ H_2 \longrightarrow H_3$ - ограниченные операторы.

а. • Докажите, что GF фредгольмов, если F и G фредгольмовы.

б. • Пусть GF и FG фредгольмовы. Докажите, что F и G оба фредгольмовы.

в. • Докажите, что сумма фредгольмова оператора и компактного снова фредгольмова.

Определение 3.29. Индексом фредгольмова оператора F называется число
$$\dim\ker F - \dim\operatorname{coker} F.$$

Упражнение 3.30: Докажите, что индекс $F' = F + K$ равен индексу F, для любого компактного оператора $K: H_1 \longrightarrow H_2$.
Упражнение 3.31: Индекс фредгольмовых операторов согласован с композицией:
$$\operatorname{ind}(FG) = \operatorname{ind} F + \operatorname{ind} G. \tag{3.2.2}$$

Утверждение 3.32: Пусть оператор $F: H \longrightarrow H$ фредгольмов. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого оператора $G \in \operatorname{End}(H)$, удовлетворяющего $|G - F| < \varepsilon$, оператор G также фредгольмов.

Доказательство: Пусть $G_1 = G - F$. Если F тождественный оператор, имеем
$$(Id_H + G_1)^{-1} = Id_H - G_1 + G_1^2 - G_1^3 + ...$$
причем ряд $Id_H - G_1 + G_1^2 - G_1^3 + ...$ сходится для $|G_1| < 1$. Для произвольного F, воспользуемся утверждением упражнения 3.27, найдем F_1 такой, что $FF_1 = \mathsf{Id}_H + K$, и запишем
$$GF_1 = (G_1 + F)F_1 = \mathsf{Id}_H + K + G_1 F_1$$
где F_1 - оператор, удовлетворяющий $FF_1 = \mathsf{Id}_H + K$ и $F_1 F = \mathsf{Id}_H + K'$. Норма $G_1 F_1$ ограничена $|F_1||G_1|$. В силу уже доказанного утверждения, для $|G_1| < |F_1|^{-1}$, оператор $\mathsf{Id}_H + G_1 F_1$ обратим, и оператор $GF_1 = \mathsf{Id}_H + K + G_1 F_1 + K$ фредгольмов. Таким же образом доказывается, что $F_1 G$ фредгольмов тоже. ■
Упражнение 3.33: Пользуясь тем же самым рассуждением, докажите следующее. Пусть $F: H_1 \longrightarrow H_2$ фредгольмов. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого оператора $G \in \operatorname{Hom}(H_1, H_2)$, удовлетворяющего $|G - F| < \varepsilon$, G тоже фредгольмов.
Утверждение 3.34: Пусть $F: H_1 \longrightarrow H_2$ фредгольмов оператор. Тогда существует ε такое, что для любого $G \in \operatorname{Hom}(H_1, H_2)$, удовлетворяющего $|G - F| < \varepsilon$, индексы G и F равны.

Доказательство: Возьмем F_1 такой, что $FF_1 = \mathsf{Id}_H + K$, и получим
$$GF_1 = \mathsf{Id}_H + K + (G - F)F_1$$
Оператор $\mathsf{Id}_H + (G-F)F_1$ обратим для $|(G-F)| < |F_1|^{-1}$, значит, имеет индекс 0, а оператор $\mathsf{Id}_H + (G - F)F_1 + K$ имеет тот же самый индекс,

потому что индекс не меняется от добавления компактного оператора. Значит, индекс GF_1 равен индексу FF_1. В силу мультипликативного свойства индекса (3.2.2), из этого сразу следует, что $\operatorname{ind} F = \operatorname{ind} G$. ■

Мы получили, что множество фредгольмовых операторов открыто в множестве всех ограниченных операторов, с топологией, которая задается нормой, а отображение $F \longrightarrow \operatorname{ind} F$ локально постоянно.

3.3. Эллиптические операторы и теорема об индексе

В этом разделе, M обозначает гладкое, компактное, риманово многообразие.

Пример 3.35: Пусть M - риманово многообразие. Оператор Лапласа $\Delta: \ C^\infty M \longrightarrow C^\infty M$, $\Delta(f) = d^* df$ – эллиптический оператор второго порядка. Его символ равен тензору Римана $g \in \mathsf{Sym}^2 TM$ (проверьте это).

Определение 3.36. Пусть F - расслоение со связностью и метрикой на M. Определим **соболевскую норму, ассоциированную со связностью и метрикой** на пространстве сечений F по формуле

$$|f|_s^2 = \sum_{i=0}^{s} \int |\nabla^i f| \operatorname{Vol}$$

где

$$\nabla^i: \ F \longrightarrow F \otimes \underbrace{\Lambda^1 M \otimes ...}_{i \text{ раз}}$$

i-я степень связности, а $|\cdot|$ - естественная метрика на расслоении $F \otimes \underbrace{\Lambda^1 M \otimes ...}_{i \text{ раз}}$, индуцированная метрикой на M и F. Соответствующее гильбертово пространство обозначается $L^2_s(F)$.

Теорема 3.37: (основная теорема теории эллиптических операторов) Пусть $D: \ F \longrightarrow G$ – эллиптический оператор i-го порядка. Продолжим D по непрерывности до отображения из $L^2_s(F)$ в $L^2_{s-i}(G)$. Тогда D фредгольмов. Более того, все элементы $\ker D$ бесконечно дифференцируемые.

Доказывать эту теорему довольно долго, она чрезвычайно фундаментальная, и я не буду. Оно есть тут: [V]

Замечание 3.38. Из того, что все элементы $\ker D$ бесконечно дифференцируемые следует, что $\ker D: \ L^2_s(F) \longrightarrow L^2_{s-i}(G)$ не зависит от выбора $s \in \{i, i+1, i+2, ...\}$.

Замечание 3.39. Сопряженный оператор (относительно L^2_0-метрики) к дифференциальному оператору - снова дифференциальный оператор (проверьте это), к эллиптическому оператору - эллиптический (проверьте). Коядро эллиптического оператора $\operatorname{coker} D: \ L^2_s(F) \longrightarrow L^2_{s-i}(G)$ это ядро его сопряженного $\ker D^* : \ L^2_{s-i}(F) \longrightarrow L^2_{s-2i}(G)$, которое, в силу предыдущего замечания, тоже не зависит от выбора $s \in \{2i, 2i+1, 2i+2, ...\}$.

Определение 3.40. Индекс ind эллиптического оператора D это число $\dim\ker D - \dim\ker D^*$.

Замечание 3.41. Если D_t – семейство эллиптических операторов i-го порядка, непрерывно зависящих от параметра $t \in [0,1]$, то $\operatorname{ind} D_0 = \operatorname{ind} D_1$. Действительно, каждому из D_t соответствует фредгольмов оператор $D_t : \ L^2_s(F) \longrightarrow L^2_{s-i}(G)$, его индекс равен индексу D_t, а индекс фредгольмова оператора локально постоянный в норменной топологии.

Легко видеть, что эллиптические операторы с одинаковым символом можно продеформировать друг в друга, не меняя символа. Поэтому индекс эллиптического оператора зависит только от символа. Непрерывные деформации символа тоже не меняют индекса, по той же самой причине. Поэтому индекс зависит только от класса гомотопии символа, который можно рассматривать как невырожденное сечение расслоения $\mathsf{Sym}^i TM \otimes \operatorname{Hom}(F,G)$. Такие сечения описываются явно с точностью до гомотопии в терминах характеристических классов (или топологической K-теории) многообразия M и расслоений F и G. **Формула Атьи-Зингера** - формула, выражающая индекс эллиптического оператора как некоторый полином от этих топологических инвариантов.

Замечание 3.42. Приведенное выше рассуждение о топологической природе индекса эллиптического оператора принадлежит И. М. Гельфанду. Он рассказал о своем преположении Атье и Зингеру, предложив им найти точное выражение индекса в терминах характеристических классов, и они в скором времени открыли свою формулу, и написали Гельфанду много благодарностей.

Нам понадобится следующая простая форма теоремы об индексе.
Теорема 3.43: (теорема Атьи-Зингера для эллиптических операторов второго порядка) Пусть M - гладкое многообразие, а

$$D: \ C^\infty M \longrightarrow C^\infty M$$

– эллиптический оператор второго порядка. Тогда $\operatorname{ind} D = 0$.

Доказательство: Индекс ψ оператора D есть сечение $\mathsf{Sym}^2 TM$, то есть метрический тензор на T^*. Условие эллиптичности записывается как $\psi(v,v) \neq 0$, для любого ненулевого $v \in T^*M$, но это значит, что ψ - положительно (или отрицательно) определенная метрика. Предположим, что ψ положительно определено. Поскольку положительно определенные метрические тензоры составляют выпуклое подмножество в сечениях $\mathsf{Sym}^2 TM$, оно связно, а значит, индекс D одинаковый для каждого D. Осталось вычислить индекс для какого-нибудь из эллиптических операторов второго порядка, например, для оператора Лапласа Δ. Но оператор Лапласа самосопряжен, значит,

$$\operatorname{ind} \Delta = \dim\ker \Delta - \dim\ker \Delta^* = \dim\ker \Delta - \dim\ker \Delta = 0$$

■

3.4. Принцип максимума Хопфа

В этом разделе, M – гладкое многообразие, не обязательно компактное. В теории операторов второго порядка, "эллиптический" значит "эллиптический оператор с положительно определенным символом", и мы будем молчаливо подразумевать, что символ положительно (а не отрицательно) определен. Это предположение ничего не меняет, просто фиксирует выбор знака.

Принцип максимума Хопфа (он же "strong maximum principle") назван в честь американского математика Эберхарда Хопфа (Eberhard Hopf, 1902-1983), доказавшего его в 1927-м году. Обыкновенно он формулируется в таком виде.
Теорема 3.44: (strong maximum principle for second order elliptic equations) Пусть $D: \ C^\infty M \longrightarrow C^\infty M$ - эллиптический оператор второго порядка. причем $D(f) = 0$ для функции $f = const$. Пусть u функция

такая, что $D(u) \geqslant 0$. Предположим, что u имеет максимум в какой-то точке M. Тогда u – константа.

Доказательство: В координатах, оператор D записывается так:

$$Du = A^{ij}u_{ij} + B^i u_i, \tag{3.4.1}$$

где A^{ij} - положительно определенная матрица, записывающая символ D, u_i первые производные u, u_{ij} - матрица вторых производных (ее часто называют гессиан). Предположим сначала, что $D(u) > 0$ на M. В точке z максимума u, первые производные u зануляются, матрица вторых производных неположительно определена, и поэтому

$$Du\Big|_z = A^{ij}u_{ij}\Big|_z \leqslant 0,$$

что противоречит $Du > 0$. Поэтому такая функция u не может иметь максимума.

Пусть теперь $D(u) \geqslant 0$, и u достигает максимума в точке $z \in M$. Введя координаты в окрестности z, мы можем считать, что M – это единичный шар в $\mathbb{R}^n$, а $z = 0$. Выберем область $\Omega \Subset M$, которая содержится в шаре $B_r(0)$ радиуса $r < 1$.

Если мы добавим к u решение ϕ неравенства $D\phi > 0$, максимум $u+\phi$ будет всегда достигаться на границе Ω, в силу аргумента, приведенного выше.

Нам нужна функция ϕ, определенная на Ω, и такая, что $D\phi > 0$, то есть $B^i\phi_i < A^{ij}\phi_{ij}$ везде на Ω. В качестве ϕ можно выбрать функцию εe^{cx_1}, где x_1 – координата на Ω, а c выбрано, чтобы выполнялось $A^{1,1}c > b^1$ (из этого сразу следует, что $D\phi > 0$). Поскольку максимум $u + \varepsilon e^{cx_1}$ достигается на границе $\partial\Omega$ для любого $\varepsilon > 0$, мы получаем, что $\sup_\Omega u$ достигается на границе $\partial\Omega$.

Мы доказали следующую теорему (проверьте).

Теорема 3.45: (слабый принцип максимума) Пусть

$$D:\ C^\infty M \longrightarrow C^\infty M$$

– эллиптический оператор второго порядка. причем $D(f) = 0$ для функции $f = const$. Рассмотрим область $\Omega \subset M$, замыкание которой компактно. Тогда любое решение неравенства $D(u) \geqslant 0$ достигает максимума $\sup_\Omega u$ на границе $\partial\Omega$.

Доказательство сильного принципа максимума выводится из следующей леммы, принадлежащей Э. Хопфу.

Лемма 3.46: (лемма Хопфа) Пусть D - эллиптический оператор на замкнутом шаре $B \subset \mathbb{R}^n$ вида (3.4.1), а u - гладкая в B функция, такая, что $D(u) \geqslant 0$. Предположим, что u достигает максимума на точке z_0 границы ∂B, причем внутри шара $u < u(z_0)$. Тогда производная u по радиальному вектору в точке z положительна: $\operatorname{Lie}_{\vec{r}} u > 0$.

Доказательство: Для упрощения обозначений, предположим, что шар B единичный, $u\Big|_B \leqslant 0$, и $u(z_0) = 0$. Рассмотрим функцию $v \in C^\infty B$, заданную формулой $v(m) = e^{-\alpha r(m)^2} - e^{-\alpha}$, где $\alpha > 0$ вещественное число, а $r(m) = |m|$. Легко видеть, что

$$D(v)\Big|_m = \alpha^2 e^{-\alpha r(m)^2}(a^{ij} m_i m_j + O(\alpha)).$$

Поэтому, для достаточно больших α, $D(v) > 0$ в области $\Omega = B \backslash B'$, где $B' \subset B$ шар с центром в 0 и радиусом $r_0 < 1$. Легко видеть, что для $\varepsilon \ll 1$, $u - \varepsilon v < 0$ в B'. Поскольку $v = 0$ на границе B, из слабого принципа максимума следует, что $u - \varepsilon v < 0$ в области Ω, и достигает максимума в z_0. Значит, производная $\operatorname{Lie}_{\vec{r}}(u - \varepsilon v)\Big|_{z_0} \leqslant 0$, но коль скоро $\operatorname{Lie}_{\vec{r}} v\Big|_{z_0} < 0$, мы получаем $\operatorname{Lie}_{\vec{r}} u\Big|_{z_0} > 0$. Мы доказали лемму Хопфа. ■

Окончание доказательства сильного принципа максимума. Сильный принцип максимума немедленно следует из слабого принципа максимума и леммы Хопфа. Действительно, пусть локальный максимум функции u достигается в точке $z \in M$, а $Z := \{m \in M \mid u(m) = u(z)\}$. Если u не постоянно, то всегда существует шар, внутренность которого не пересекает Z, а граница пересекает, причем в точке локального максимума z_0. Поскольку производная u в z_0 ненулевая (по лемме Хопфа), это никак не может быть локальный максимум: противоречие. ■

3.5. Метрика Годушона

Основная теорема геометрии эрмитовых многообразий принадлежит П. Годушону.

Определение 3.47. Пусть ω - эрмитова форма комплексного эрмитова многообразия M, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$. Метрика на M называется **метрикой Годушона**, если $\partial\bar\partial(\omega^{n-1}) = 0$.

Теорема 3.48: (П. Годушон, 1977) Пусть (M, ω) – компактное, комплексное, эрмитово n-мерное многообразие. Тогда существует единственная (с точностью до постоянного множителя) положительная функция $\psi \in C^\infty M$ такая, что $\psi\omega$ - метрика Годушона.

Доказательство. Шаг 1: Достаточно найти функцию $\phi > 0$ такую, что $\partial\bar\partial(\phi\omega^{n-1}) = 0$. Тогда $\phi = \psi^{1/(n-1)}$.

Шаг 2: Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L(\phi) = \frac{\partial\bar\partial(\phi\omega^{n-1})}{\omega^n}$$

(это выражение имеет смысл, потому, что пространство форм объема на M одномерно, а частное форм объема это функция). Легко видеть, что L эллиптический оператор, с тем же символом, что у оператора Лапласа (докажите это).

Шаг 3: На пространстве $C^\infty M$ рассмотрим L^2-метрику, заданную формулой

$$(x, y) = \int_M xy\omega^n.$$

Сопряженный оператор к L можно выписать явно, воспользовавшись формулой Стокса. Пусть $\alpha \in C^\infty M$. Из формулы Стокса получаем

$$\int_M L(\phi)\alpha\omega^n = \int_M \partial\bar\partial(\phi\omega^{n-1})\alpha = \int_M \phi\omega^{n-1} \wedge \partial\bar\partial\alpha,$$

то есть

$$L^*\alpha = \frac{\omega^{n-1} \wedge \partial\bar\partial\alpha}{\omega^n}.$$

Шаг 4: Поскольку L^* зануляется на константах, его ядро одномерно в силу сильного принципа максимума (докажите это). По формуле индекса для эллиптических операторов второго порядка, доказанной в этой лекции, индекс L^* равен нулю, значит, его коядро одномерно. Из этого сразу следует, что ядро L тоже одномерно, и метрика Годушона единственна с точностью до константы. Для существования метрики Годушона осталось убедиться, что любая ненулевая функция $u \in \ker L$ всюду положительна, либо всюду отрицательна.

Шаг 5: Пусть $f \in \operatorname{im} L^*$. Применив принцип максимума, мы получим, что в окрестности минимума f, эта функция строго отрицательна, в окрестности максимума строго положительна (проверьте это). Если в ядре L найдется функция u, которая где-то положительна, где-то отрицательна, можно сконструировать функцию $\alpha \in C^\infty M$, которая всюду положительна, и удовлетворяет $\int_M u\alpha\omega^n = 0$. Поскольку $\operatorname{im} L^*$ совпадает с ортогональным дополнением к $\ker L$, из этого следует, что α лежит в $\operatorname{im} L^*$. Но это невозможно, в силу доказанного выше. Поэтому любая ненулевая функция $u \in \ker L$ всюду положительна, либо всюду отрицательна. Мы доказали существование метрики Годушона.■

Задачи.

Задача 3.1. Пусть $R = k[t_1, ..t_n]$ - кольцо полиномов. Докажите, что алгебра $\operatorname{Diff}^*(R)$ порождена образующими $t_1, t_2, ...t_n, \frac{d}{dt_1}, \frac{d}{dt_2}, ... \frac{d}{dt_n}$, с соотношениями

$$[t_i, t_j] = 0, \quad [\frac{d}{dt_i}, \frac{d}{dt_j}] = 0, \qquad (i,\ j \text{ - любые})$$
$$[t_i, \frac{d}{dt_i}] = 1, \quad [\frac{d}{dt_i}, \frac{d}{dt_j}] = 0 \qquad (i \neq j)$$

Задача 3.2. Докажите, что эта алгебра проста (не имеет двусторонних идеалов).

Задача 3.3. Напомню, что паракомпактное многообразие это многообразие, допускающее локально конечное разбиение единицы. Докажите, что каждое расслоение над паракомпактным многообразием M является прямым слагаемым тривиального. Выведите из этого, что проективные модули над $C^\infty M$ это пространства сечений гладких расслоений. Докажите, что гладкое расслоение однозначно задается структурой $C^\infty M$-модуля на пространстве сечений.

Задача 3.4. Пусть M - риманово многообразие, $d: \quad \Lambda^* M \longrightarrow \Lambda^* M$ дифференциал де Рама, а $d^* = *d*$ сопряженный оператор. Докажите, что $d + d^*$ эллиптический,

Задача 3.5. Пусть M - четырехмерное риманово многообразие, $\Lambda^+ M$ - пространство форм $v \in \Lambda^2 M$, удовлетворяющих $*v = v$, а

$$D\ \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^+ M \oplus C^\infty M$$

проекция $d + d^*(\Lambda^1 M)$ в $\Lambda^+ M \oplus C^\infty M$. Является ли D эллиптическим?

Задача 3.6. Пусть $\mathcal{C}$ - алгебра ограниченных операторов на гильбертовом пространстве H, а $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$ - пространство всех компактных операторов. Докажите, что $\mathcal{K}$ - двусторонний идеал.

Определение 3.7. Факторалгебра $\mathcal{C}/\mathcal{K}$ называется **алгеброй Калкина** гильбертова пространства H (Calkin).

Задача 3.8 (*). Докажите, что алгебра Калкина проста (не содержит нетривиальных двусторонних идеалов).

Задача 3.9. Пусть $F: H \longrightarrow H$ - ограниченный оператор. Докажите, что F фредгольмов тогда и только тогда, когда его класс $[F]$ в алгебре Калкина обратим.[1]

Задача 3.10. Пусть Φ - множество всех фредгольмовых операторов на гильбертовом пространстве, с топологией, которая задается нормой операторов. Пусть $F_1, F_2 \in \Phi$ операторы с одинаковым индексом. Докажите, что они лежат в одной и той же связной компоненте Φ.

Задача 3.11 (*). Докажите, что топология, заданная соболевской нормой $|\cdot|_s^2$ на пространстве сечений расслоения F, не зависит от выбора метрики и связности на F.

Задача 3.12. Докажите, что естественное вложение из пространства $\Gamma(M,F)_s^2$ сечений расслоения F с метрикой $|\cdot|_s^2$ в это же самое пространство с метрикой $|\cdot|_{s-i}^2$ компактно (то есть переводит ограниченные подмножества в $\Gamma(M,F)_s^2$ в прекомпактные подмножества $\Gamma(M,F)_{s-i}^2 \subset L_{s-i}^2(F)$).

Задача 3.13. Пусть M - риманово многообразие, а D - эллиптический оператор второго порядка на $C^\infty M$, зануляющийся на константах. Докажите, что есть метрика g на M и векторное поле v такое, что

$$D(f) = \pm\Delta f + \operatorname{Lie}_v f,$$

где $\operatorname{Lie}_v f$ - производная Ли вдоль v, а Δ - оператор Лапласа.

Задача 3.14. Пусть D – эллиптический оператор порядка i на 1-мерном вещественном расслоении. Докажите, что $\operatorname{ind} D = 0$. Для каких i существуют такие операторы?

[1] Это значит, что существует $G_1, G_2: H \longrightarrow H$, что $FG_1 - 1$ и $G_2F - 1$ компактны.

Задача 3.15. Метрика ω на эрмитовом n-многообразии называется балансированной (balanced), если $d(\omega^{n-1}) = 0$. Приведите пример компактного комплексного многообразия, не допускающего такой метрики, для $n > 2$.

Задача 3.16 (*). Метрика ω на комплексном эрмитовом многообразии называется кэлеровой метрикой кручения (Kähler torsion metric, сокращенно KT), если $dd^c\omega = 0$. Может ли метрика быть одновременно KT-метрикой и балансированной?

Задача 3.17 (**). Пусть ω - балансированная эрмитова метрика на компактном, комплексном многообразии. Может ли форма ω^{n-1} быть точной?

Задача 3.18. Пусть (M, ω) - компактное, комплексное эрмитово многообразие с KT-метрикой, а $H := d^c\omega$ соответствующая замкнутая 3-форма, которая называется **кручением** M. Может ли H быть точной? А неточной?

Задача 3.19. Докажите, что конус строго положительных $(n-1, n-1)$-форм на компактном комплексном n-многообразии двойственен конусу положительных $(1,1)$-потоков. Используя аргумент, доказывающий теорему Харви-Лаусона, докажите, что многообразие, на котором нет dd^c-замкнутых $(n-1, n-1)$-форм, допускает dd^c-точный положительный $(1,1)$-поток. Выведите из этого существование эрмитовых метрик, для которых выполняется $dd^c(\omega^{n-1}) = 0$.

Литература:

[G] P. Gauduchon *Le théoremè de l'excentricité nulle*, Comptes Rendus (Acad. Sc. Paris) Serie A. 285, 387-390 (1977).

[GT] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,* Springer-Verlag, 1983

[IP] S. Ivanov, G. Papadopoulos *A no-go theorem for string warped compactifications*, Phys. Lett. B 497, 309-316, 2001, hep-th/0008232.

[LT] Lübke, M., Teleman, A., *The Kobayashi-Hitchin correspondence*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1995. x+254 pp

[V] М. Вербицкий, "Теория Ходжа и ее применения", теоремы и задачи (осенний семестр 2006-го года, Петербург, физматклуб).
http://fizmatclub.spb.ru/courses/♯hodgetheoryandapplications