2. Комплексные поверхности, лекция 2: Положительные потоки и теорема Хана-Банаха

Изложенный в лекции материал происходит (в основном) из статьи Харви и Лоусона 1983-го года [HL]. Про потоки понятно рассказано в книжке Демайи [D]. Теорема Хана-Банаха есть в книжке Бурбаки, "Топологические Векторные Пространства".

2.1. Обобщенные функции

Определение 2.1. Локально выпуклое топологическое векторное пространство это топологическое векторное пространство, базу топологии которого составляют выпуклые множества.

Определение 2.2. Рассмотрим векторное пространство, снабженное набором норм $|\cdot|_i$, $i = 0, 1, 2, ...$ и топологией, которая задана метрикой вида

$$d(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x-y|_i}{1+|x-y|_i} 2^{-i}. \tag{2.1.1}$$

Такое пространство называется **пространством Фреше**, если эта метрика полна (т.е. любая последовательность Коши в этой метрике сходится). Отметим, что последовательность точек сходится в топологии Фреше тогда и только тогда, когда она сходится во всех нормах $|\cdot|_i$, а базой топологии Фреше будут бесконечные пересечения ε-шаров вида

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} B_x(\varepsilon, |\cdot|_i),$$

во всех метриках $|\cdot|_i$ (докажите это).

Упражнение 2.3: Проверьте это, и убедитесь, что пространство Фреше локально выпукло.

Определение 2.4. Пусть M - гладкое многообразие. Введем на M метрику, и пусть $\nabla^i: \ C^\infty(M) \longrightarrow \Lambda^1(M)^{\otimes i}$ - отображение, ставящее в соответствие функции ее i-ю производную (здесь ∇ обозначает связность Леви-Чивита). Определим на пространстве функций с компактным носителем топологию C^k, заданную нормой

$$|\phi|_{C^k} := \sup_M \sum_{i=0}^{k} |\nabla^i \phi|. \tag{2.1.2}$$

Легко видеть, что эта топология не зависит от выбора метрики на M (докажите это).

Определение 2.5. Пространство тест-функций – это пространство функций с компактным носителем, с метрикой, которая задана по формуле (2.1.1) исходя из норм $|\cdot|_{C^i}$

Упражнение 2.6: Докажите, что это пространство Фреше. Докажите, что топология на пространстве тест-функций не зависит от выбора метрики на M.

Определение 2.7. Обобщенной функцией (распределением) называется функционал на пространстве функций с компактным носителем, непрерывный в одной из топологий C^i. На пространстве распределений задана **слабая топология**, это слабейшая топология, в которой спаривание с пространством тест-функций непрерывно.

Упражнение 2.8: Докажите, что слабая топология на обобщенных функциях локально выпукла.
Пример 2.9: Дельта-функция δ_t – функционал, ставящий ϕ в соответствие $\phi(t)$, где $t \in M$ – точка. Легко видеть, что дельта-функция непрерывна в топологии C^0. Ее производная непрерывна в C^1, и так далее.

2.2. Потоки на многообразиях

Замечание 2.10. Пусть M - многообразие, B - расслоение. Введем метрику на M и связность с метрикой на B. Формула (2.1.2) задает норму C^i на пространствах сечений B с компактным носителем. Рассуждая, как для функций, мы строим топологию Фреше на пространстве сечений, и проверяем, что она не зависит от выбора метрики.

Определение 2.11. (p, q)**-потоком** на комплексном n-мерном многообразии называется функционал на пространстве $\Lambda_c^{n-p,n-q}(M)$ $(n-p, n-q)$-форм с компактным носителем, непрерывный в одной из C^i-топологий.

Определение 2.12. Пространство тест-форм типа (p, q) на комплексном многообразии это пространство (p, q)-форм с компактным носителем, снабженное структурой пространства Фреше по формуле (2.1.1), где нормы $|\cdot|_i$ равны C^i.

Замечание 2.13. Потоки суть функционалы на $\Lambda_c^{n-p,n-q}(M)$, непрерывные в топологии тест-форм.

Замечание 2.14. Также потоки можно рассматривать как (p, q)-формы с коэффициентами в обобщенных функциях.

Замечание 2.15. Гладкую (p, q)-форму ψ можно интерпретировать как (p, q)-поток: для любой тест-формы $\alpha \in \Lambda_c^{n-p,n-q}(M)$, рассмотрим функционал $\alpha \longrightarrow \int_M \psi \wedge \alpha$. Это задает вложение $\Lambda^{p,q}(M) \hookrightarrow \mathcal{D}^{p,q}(M)$ из форм в потоки. Легко видеть, что потоки будут пополнением $\Lambda^{p,q}(M)$ в топологии, двойственной топологии на тест-формах.

Замечание 2.16. Поскольку дифференцирование вдоль векторного поля непрерывно в топологии потоков (проверьте это), на пространстве потоков определен дифференциал де Рама, продолженный по непрерывности из пространства форм, а также дифференциалы Дольбо ∂ и $\bar\partial$. В квадрате эти дифференциалы равны нулю (проверьте). Это позволяет определить когомологии де Рама и Дольбо потоков.

Замечание 2.17. В пространстве потоков имеет места лемма Пуанкаре (о том, что когомологии дифференциала де Рама порождены постоянными функциями) и Дольбо (о том, что когомологии дифференциала Дольбо равны голоморфным функциям). Доказательство обычное (см. задачи к этой лекции). Из лемм Пуанкаре и Дольбо сразу следует, что потоки являются ацикличными резольвентами к константам и к голоморфным функциям, а значит их когомологии равны обычным когомологиям де Рама и Дольбо.

Замечание 2.18. Из этого сразу следует, что образ ∂, d и $\bar\partial$ замкнут в пространстве потоков на компактном многообразии (проверьте).

Определение 2.19. Положительная $(1,1)$**-форма** – это вещественная (1,1)-форма α, удовлетворяющая $\alpha(x, Ix) \geqslant 0$, для любого вещественного векторного поля x.

Замечание 2.20. Локально, положительную (1,1)-форму можно представить в виде

$$\alpha = \sum_i \sqrt{-1}\alpha_i dz_1 \wedge d\bar z_i,$$

где dz_i - базис в $\Lambda^{0,1}(M)$, а $\alpha_i \geqslant 0$ вещественные функции (проверьте это).

Определение 2.21. выпуклым конусом в векторном пространстве V называется подмножество $A \subset V$, удовлетворяющее следующим свойствам.

1. $\forall x, y \in A$, их сумма тоже лежит в A.
2. $\forall x \in A, \lambda \in \mathbb{R}^{>0}$, λx также лежит в A.

Замечание 2.22. Положительные $(1,1)$-формы образуют выпуклый конус в пространстве вещественных (1,1)-форм (проверьте это). Взяв замыкание этого конуса в топологии потоков, мы получим конус **положительных потоков**.

Упражнение 2.23: Пусть $dz_1, dz_2, ...$ - базис в $\Lambda^{0,1}(M)$. Докажите, что все положительные потоки имеют такой вид:

$$\eta = \sum_i \sqrt{-1}\eta_i dz_1 \wedge d\bar z_i,$$

где η_i – некоторая мера а на M.

Указание 2.24. Воспользуйтесь тем, что любой аддитивный, $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$-линейный функционал на неотрицательных функциях, принимающий значения в $\mathbb{R}^{\geqslant 0}$, непрерывен в C^0-топологии (докажите это). Выведите из этого, что такой функционал σ-аддитивен, значит, является мерой.

Замечание 2.25. Из этого ясно, что положительные потоки непрерывны в C^0-топологии.

Определение 2.26. Пусть M - комплексное, n-мерное многообразие. $(n-1,n-1)$-поток η называется **положительным** если $\int_M \eta\wedge\alpha \geqslant 0$ для любой положительной $(1,1)$-формы,

2.3. Кэлеровы формы и теорема Хана-Банаха

Теорема Хана-Банаха потребуется нам в такой форме (доказательство см. задачи).

Теорема 2.27: (Теорема Хана-Банаха о разделении) Пусть V - топологическое векторное пространство, $A\subset V$ - открытый выпуклый конус, не содержащий 0, $W\subset V$ - замкнутое подпространство, а θ_W - непрерывный линейный функционал на W, положительный на $W\cap A$. Тогда на V существует непрерывный, линейный функционал θ, такой, что $\theta\big|_A > 0$, а $\theta\big|_W = \theta_W$. ■

Замечание 2.28. Мы будем применять следующее утверждение, которое является частным случаем теоремы Хана-Банаха. Пусть V - топологическое векторное пространство, $A\subset V$ - открытый выпуклый конус, не содержащий 0, а $W\subset V$ - замкнутое подпространство, не пересекающее A. Тогда на V существует непрерывный, линейный функционал θ, такой, что $\theta\big|_A > 0$, а $\theta\big|_W = 0$.

Определение 2.29. Строго положительная форма - форма, лежащая во внутренности положительного конуса.

Упражнение 2.30: Докажите, что $(1,1)$-форма α строго положительна тогда и только тогда, когда $\alpha(x,Ix)>0$ для любого $x\in TM$.

Замечание 2.31. Многообразие называется кэлеровым, если на нем существует строго положительная, замкнутая форма. Это одно из определений.

Замечание 2.32. Если поток θ, заданный на компактном многообразии, зануляется на замкнутых формах, то он точен. Действительно,

$$0=\int_M \theta\wedge d\alpha = (-1)^{\deg\theta}\int_M d\theta\wedge\alpha,$$

значит, $d\theta$ зануляется на любой тест-форме, значит, он равен нулю. Но класс когомологий θ тоже равен нулю, потому что для ненулевого класса когомологий существует замкнутая форма α с $\int_M \theta\wedge\alpha\neq 0$ по двойственности Пуанкаре.

Аналогичное рассуждение можно использовать для доказательства следующей леммы.

Лемма 2.33: Пусть M - компактное комплексное n-мерное многообразие, а θ – $(n-1,n-1)$-поток, который зануляется на замкнутых $(1,1)$-формах. Тогда θ – $(n-1,n-1)$-часть точного потока $\tilde\theta$.

Доказательство: Пусть V – пространство 2-форм, с топологией Фреше. Пространство (1,1)-форм замкнуто в V, пространство замкнутых форм тоже замкнуто. Пусть W – подпространство в V, порожденное замкнутыми формами и $(1,1)$-формами. Оно замкнуто. Определим функционал θ_1 на W так: на $(1,1)$-формах $\theta_1=\theta$, на замкнутых формах $\theta_1=0$. По теореме Хана-Банаха, θ_1 продолжается до функционала $\tilde\theta$ на V. В силу предыдущего замечания, $\tilde\theta$ точен. ■

Теорема 2.34: (Харви-Лоусон, 1983) Пусть M - комплексное, компактное многообразие, не допускающее кэлеровой метрики. Тогда на M существует ненулевой положительный $(n-1,n-1)$-поток, который является $(n-1,n-1)$-частью потока вида $d\alpha$.

Доказательство: Пусть V - пространство вещественных $(1,1)$-форм на M, с топологией пространства Фреше, $A\subset V$ - строго положительные $(1,1)$-формы, а $W\subset V$ - пространство замкнутых $(1,1)$-форм. Если M не кэлерово, то $A\cap W=\emptyset$, и существует непрерывный функционал θ на V, зануляющийся на W, и положительный на A. Непрерывные функционалы на V – это $(n-1,n-1)$-потоки. В силу предыдущей леммы, θ есть $(n-1,n-1)$-часть точного потока. ■

Замечание 2.35. Если положительный поток θ на кэлеровом многообразии M является $(n-1,n-1)$-частью точного потока, то $\int_M \theta\wedge\omega=0$, но в этом случае $\theta=0$ (проверьте это).

Замечание 2.36. Оператор интегрирования формы вдоль кривой $C\subset M$ является положительным, замкнутым $(n-1,n-1)$-потоком (докажите это).

Следствие 2.37: Пусть $M\xrightarrow{\pi}X$ - голоморфное отображение комплексных многообразий с одномерными слоями, X кэлерово, а M некэлерово. Тогда любой гладкий слой π гомологичен $(n-1,n-1)$-части точного потока.

Доказательство: Рассмотрим отображение прямого образа π_* на потоках, двойственное обратному образу дифференциальных форм. Полезно думать про это отображение, как про интегрирование вдоль слоев π. Оно переводит $(n-1,n-1)$-потоки в $(n-2,n-2)$-потоки, положительные потоки в положительные, и коммутирует с дифференциалом де Рама (проверьте это). Рассмотрим точный потом $\tilde{\theta}$ с положительной $(1,1)$-частью θ. Поскольку на кэлеровом многообразии положительный поток, который равен $(n-2,n-2)$-части точной формы, зануляется (проверьте это), $\pi_*\theta = 0$. Подобное может случиться, только если θ имеет вид

$$\theta = \mu\pi^* \operatorname{Vol}_X$$

где μ - мера на M, а Vol_X - форма объема на X. Поскольку $dd^c\theta = 0$, μ постоянна на каждом слое π, и, следовательно, $\mu = \pi^*\mu_0$ для какой-то меры на X. Поскольку $\pi^*\mu_0 \operatorname{Vol}_X$ гомологична δ-функции, рассмотренной как форма старшей степени, слой π гомологичен $(n-1,n-1)$-части точного потока. ■

Следствие 2.38: Пусть M - некэлерова поверхность, голоморфно расслоенная над кривой: $M \xrightarrow{\pi} X$ Тогда общий слой π гомологичен нулю.

Доказательство: В силу аргумента, приведенного выше, фундаментальный класс общего слоя π пропорционален $\omega_0 := \pi^* \operatorname{Vol}_X$, где Vol_X – кэлерова форма на X. Поэтому ω_0 – $(1,1)$-часть точной формы $d\theta$. Выбрав θ вещественным, получим $(d\theta)^{2,0} = \overline{(d\theta)^{0,2}}$, а следовательно,

$$0 = \int_M d\theta \wedge d\theta = 2\int_M (d\theta)^{2,0} \wedge (d\theta)^{0,2} = \int_M |(d\theta)^{2,0}|^2,$$

Мы получили $(d\theta)^{2,0} = 0$, значит $\omega_0 = d\theta$. ■

Задачи.

Задача 2.1. Пусть $A_0 \xrightarrow{d} A_1 \xrightarrow{d} A_2$ комплекс, на котором задана **гомотопия**, то есть оператор $\gamma: A_i \longrightarrow A_{i-1}$, такой, что $d\circ\gamma + \gamma\circ d = \mathsf{Id}_{A_1}$ на A_1. Докажите, что у d нет когомологий.

Задача 2.2. Пусть на многообразии M задано векторное поле v такое, что производная Ли вдоль v обратима, и обратный оператор коммутирует с d. Докажите, что $(\operatorname{Lie}_v)^{-1}$ - гомотопия.

Указание 2.3. Воспользуйтесь формулой Картана: $\operatorname{Lie}_v \eta = d(\eta \lrcorner v) - (d\eta) \lrcorner v$ и выведите из нее, что $\eta = d(\operatorname{Lie}_v^{-1} \eta \lrcorner v) - (d \operatorname{Lie}_v^{-1} \eta) \lrcorner v$.

Задача 2.4. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ – звездчатая область, то есть такая, что отображение $x \longrightarrow \lambda x$ переводит M в M для любого $\lambda \leqslant 1$. Докажите, что производная Ли вдоль радиального векторного поля $\sum x_i \frac{d}{dx_i}$ обратима на i-формах, для $i > 0$

Указание 2.5. Интегрируйте коэффициенты формы вдоль отрезка $[0, x]$.

Задача 2.6. Почему этот аргумент не работает для $i = 0$?

Задача 2.7. Докажите лемму Пуанкаре для потоков.

Задача 2.8. Пусть v - голоморфное векторное поле на многообразии, такое, что производная Ли вдоль v обратима, и обратный оператор коммутирует с дифференциалом де Рама. Докажите, что

$$\eta = \partial(\operatorname{Lie}_v^{-1} \eta \lrcorner v) - (\partial \operatorname{Lie}_v^{-1} \eta) \lrcorner v$$

Можно ли из этого вывести лемму Дольбо об обращении в нуль когомологий ∂ в шаре?

Задача 2.9. Многообразие Фреше – пространство, локально покрытое картами, гомеоморфными открытому шару в пространстве Фреше, и функции перехода между картами дифференцируемы как отображения пространств Фреше. Определим бесконечномерную группу Ли как многообразие Фреше, снабженное групповой структурой, которая дифференцируема в этих картах. Докажите, что группа диффеоморфизмов многообразия это бесконечномерная группа Ли.

Задача 2.10. Докажите, что теорема Хана-Банаха эквивалентна следующему утверждению. Пусть V - топологическое векторное пространство, а $A \subset V$ - открытый выпуклый конус, не содержащий 0. Тогда существует гиперплоскость $H \subset V$, такая, что $A \cap H = \emptyset$.[1] Более того, если в замкнутом подпространстве $W \subset V$ есть гиперплоскость H_W, которая не пересекает $A \cap W$, то H можно выбрать таким образом, чтобы $H \cap W = H_W$.

Задача 2.11. Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ выпуклый, открытый конус, не содержащий 0. Докажите, что в $\mathbb{R}^2$ есть гиперплоскость h, которая не пересекает A.

Задача 2.12. Пусть $V_0 \subset V$ - подпространство такое, что $V_0 \subset V$ замкнуто, V/V_0 одномерно, а $A \subset V$ - открытый выпуклый конус, не содержащий 0. Предположим, что в V_0 теорема Хана-Банаха уже доказана, и в V_0 есть гиперплоскость $H_0 = \ker\theta_0$, которая не пересекает $V_0 \cap A$ Проекция $\pi : V \longrightarrow V/H$ переводит A в выпуклый конус в $\mathbb{R}^2$. Выведите из предыдущей задачи, что в V есть прямая $\pi^{-1}(h)$, которая не пересекает A.

Задача 2.13. Докажите теорему Хана-Банаха (воспользуйтесь леммой Цорна, то есть индукцией по вложенным подпространствам и их замыканиям, и предыдущей задачей).

[1] Это значит, что все A лежит по одну сторону H.

Задача 2.14. Напомним, что аффинная функция на векторном пространстве – это сумма линейного функционала и постоянного отображения. Пусть даны два выпуклых, открытых, непересекающихся подмножества A, B в топологическом векторном пространстве V. Докажите, что найдется непрерывная аффинная функция на V, строго положительная на одном из них, и строго отрицательная на другом.

Задача 2.15. В условиях предыдущей задачи, пусть A, B - непересекающиеся *замкнутые* выпуклые подмножества. Всегда ли найдется непрерывная аффинная функция μ на V, строго положительная на одном из них, и строго отрицательная на другом?

Задача 2.16. Всегда ли найдется такая функция, если допустить, чтобы μ равнялось нулю где-то на A или на B?

Задача 2.17. Пусть M - компактная комплексная поверхность, а $\eta \in H^2(M)$ - класс когомологий, который не является кэлеровым. Докажите, что существует положительный, замкнутый $(1,1)$-поток μ такой, что $\int_M \eta \wedge \mu \leqslant 0$.

Задача 2.18. Пусть M – компактное, комплексное некэлерово многообразие, снабженное гладким голоморфным отображением $M \xrightarrow{\pi} X$ на кэлерово многообразие размерности $\dim M - 1$. Докажите, что слой π – эллиптическая кривая.

Замечание 2.19. Такие отображения называются **эллиптическими слоениями**.

Задача 2.20. Постройте комплексную структуру на $SU(3)$, и голоморфное отображение из полученного четырехмерного комплексного многообразия в трехмерное кэлерово многообразие. Что это за трехмерное многообразие?

Задача 2.21. Постройте нетривиальное эллиптическое слоение над $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$. Можно ли добиться, чтобы его тотальное пространство было односвязно?

Литература:

[D] Demailly, J.-P., *Complex analytic and algebraic geometry*, a book, http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/books.html

[HL] R. Harvey and H. B. Lawson, *"An intrinsic characterisation of Kahler manifolds,"* Invent. Math 74 (1983) 169-198.