1. Комплексные поверхности, лекция 1: Классификация Кодаиры-Энриквеса

Под “комплексной поверхностью” будем понимать компактное, гладкое комплексное многообразие комплексной размерности 2. **Минимальная поверхность** - поверхность, не содержащая дивизоров с самопересечением -1 (такие дивизоры можно сдуть, получив гладкую поверхность с меньшим вторым числом Бетти).

Утверждения о классификации Кодаиры (Теорема 1.7 и Утверждение 1.23) доказаны не будут, остальной материал лекции вполне может быть доказан самостоятельно.

1.1. Классификация Кодаиры

Определение 1.1. Пусть M - комплексное многообразие, K его канонический класс. Рассмотрим полином $P(N) = H^0(K^N)$. Степень этого полинома $\kappa(M)$ называется **размерностью Кодаиры** M. Если P тождественно нулевой, размерность Кодаиры считается равной $-\infty$.

Классификация алгебраических поверхностей была известна уже Энриквесу. Кодаира распространил ее на комплексные поверхности.

Теорема 1.2: (Кодаира) Комплексная поверхность M проективна, если выполнено любое из следующих равносильных утверждений.

(i) M алгебраична

(ii) Поле мероморфных функций на M имеет степень трансцендентности 2.

(iii) На M существует голоморфное линейное расслоение L с $c_1(L)^2 > 0$.

Упражнение 1.3: Докажите это.

Замечание 1.4. Из этой теоремы немедленно следует, что форма пересечения на решетке Нерона-Севери неположительно определена. В частности, для любых $a, b \in NS(M)$ с $a^2 = 0$, имеем $ab = 0$. Действительно, если $ab > 0$, выражение $(na + b)^2$ будет положительно для очень большого n.

Определение 1.5. Поверхность класса VII (Kodaira class VII surface) это поверхность с $\kappa(M) = -\infty$ и первым числом Бетти $b_1(M) = 1$. **Поверхность Кодаиры** (первичная) – локально тривиальное голоморфное расслоение со слоем эллиптическая кривая над эллиптической кривой, с $b_1(M) = 3$. Вторичная поверхность Кодаиры - фактор первичной поверхности Кодаиры по конечной группе, свободно действующей на ней, с $b_1(M) = 1$.

Замечание 1.6. У Кодаиры определение "класса VII" было другое, но вышеприведенное определение с тех пор стало стандартным.

Теорема 1.7: Пусть M - минимальная комплексная поверхность, которая не алгебраична. Тогда M принадлежит к одному из следующих классов.

$\kappa(M) = 1$ M это минимальная, собственно эллиптическая поверхность, причем все слои соответствующего эллиптического слоения изоморфны (могут встречаться кратные).

$\kappa(M) = 0$ M это K3 поверхность, тор или поверхность Кодаиры, первичная ($b_1(M) = 3$) или вторичная ($b_1(M) = 1$).

$\kappa(M) = -\infty$ M - минимальная поверхность класса VII.

Замечание 1.8. Если $\kappa(M) = 1$, это значит, что M допускает бесконечно много кривых в одном и том же классе когомологий $[C]$. В этом случае, самопересечение C равно нулю, и пересечение C с любой другой кривой тоже равно нулю. Из этого следует, что M голоморфно расслаивается над кривой. Канонический класс общего слоя C этого слоения можно вычислить по формуле присоединения: $K_C = K_M\Big|_C$. Поскольку $C^2 = 0$ в решетке Нерона-Севери, $L \cdot C = 0$ для любого $L \in NS(M)$. Поэтому $K_C = \mathcal{O}$, и M - эллиптическое слоение. Из этого же аргумента следует, что эллиптическое слоение на M единственно.

1.2. Нильмногообразия и сольвмногообразия

Пусть G - связная вещественная группа Ли, $\mathfrak{g}$ ее алгебра Ли. Левоинвариантные почти комплексные структуры на G взаимно-однозначно соответствуют линейным эндоморфизмам $I: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, $I^2 = -\mathsf{Id}$. Каждый такой эндоморфизм задает разложение комплексификации $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ в сумму собственных подпространств: $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}^{1,0} \oplus \mathfrak{g}^{0,1}$.

Отметим, что каждое подпространство $\mathfrak{g}^{1,0} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ половинной размерности получается таким образом, если $\mathfrak{g}^{1,0} \cap \mathfrak{g} = 0$ (в этом случает подпространство $\mathfrak{g}^{1,0} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ называется **тотально мнимым**). Если такое пространство задано, $I \in \operatorname{End}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ можно определить, положив его равным $\sqrt{-1}$ на $\mathfrak{g}^{1,0}$, и $-\sqrt{-1}$ на комплексно сопряженном подпространстве $\mathfrak{g}^{0,1} = \overline{\mathfrak{g}^{1,0}}$. Такой оператор, легко видеть, вещественный (то есть задан на $\mathfrak{g}$), и удовлетворяет $I^2 = -\operatorname{\mathsf{Id}}$.

Утверждение 1.9: Левоинвариантная почти комплексная структура на $\mathfrak{g}$ интегрируема тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}^{1,0} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ – подалгебра Ли в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Упражнение 1.10: Докажите это.

Определение 1.11. В этом случае, I называется **левоинвариантной комплексной структурой**.

Определение 1.12. Пусть G - связная группа Ли (нильпотентная или разрешимая) снабженная левоинвариантной комплексной структурой, а $\Gamma \subset G$ - кокомпактная, дискретная подгруппа. Факторпространство G/Γ (справа) наделено естественной комплексной структурой, поскольку левое и правое действие коммутируют. Оно называется **комплексным нильмногообразием** (для нильпотентной группы Ли) и сольвмногообразием (для разрешимой).

Классификация комплексных двумерных ниль- и сольвмногообразий получена К. Хасегавой ([H]).

Хасегава доказал, что двумерные сольвмногообразия исчерпываются следующими классами. В дополнение к нильмногообразиям (тору и первичной поверхности Кодаиры), сольвмногообразиями являются поверхности Инуэ, вторичные поверхности Кодаиры, и биэллиптические поверхности.

Поверхность Кодаиры строится довольно просто.

Пусть G - произведение верхнетреугольных матриц 2x2 на $\mathbb{R}$. В G нетрудно построить комплексную структуру: для этого нужно в комплексификации $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ соответствующей алгебры Ли найти абелеву, тотально мнимую двумерную подалгебру. В качестве решетки выберем целые матрицы, это и будет поверхность Кодаиры (первичная).

1.3. Локально конформно кэлеровы многообразия

Определение 1.13. Многообразие M называется **локально конформно кэлеровым** (LCK), если у M есть кэлерово накрытие $\tilde M$ такое, что монодромия накрытия действует на $\tilde M$ гомотетиями.

Определение 1.14. Голоморфным сжатием называется голоморфное отображение

$$\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}^2,$$

сохраняющее 0, и удовлетворяющее следующему условию. Для каждого компактного подмножества $K \subset \mathbb{C}^2$, и каждого открытого подмножества $U \subset \mathbb{C}^2$, содержащего 0, композиция ϕ с собой (много раз) переводит K в подмножество U. Другими словами, отображение является голоморфным сжатием, если последовательность $\{\phi, \phi\circ\phi, \phi\circ\phi\circ\phi, ...\}$ сходится к тождественному отображению $\mathbb{C}^2 \longrightarrow 0$ равномерно на компактах.

Если голоморфное сжатие является автоморфизмом, можно породить им подгруппу Γ в автоморфизмах $\mathbb{C}^2$, изоморфную $\mathbb{Z}$. Легко видеть, что у каждой орбиты будет только одна предельная точка - 0. Поэтому голоморфное сжатие действует на $\mathbb{C}^2\backslash 0$ собственно, и факторпространство $\mathbb{C}^2\backslash 0/\Gamma$ хорошо определено. Такой фактор называется **поверхность Хопфа**.

Упражнение 1.15: Докажите, что поверхность Хопфа диффеоморфна $S^3 \times S^1$.

Пример 1.16: Рассмотрим голоморфное сжатие $x \xrightarrow{\phi} qx$, где q - комплексное число, $|q| < 1$. Соответствующая поверхность Хопфа H расслаивается над $\mathbb{C}P^1$ со слоем эллиптическая кривая. Из этого видно, что это поверхность класса VII (для доказательства, постройте сечения антиканонического класса). Также ясно, что ϕ растягивает естественную (плоскую) метрику на $\mathbb{C}^2\backslash 0$ в $|q|^2$ раз, а значит, H - локально конформно кэлерово.

Определение 1.17. Пусть (S, g) - риманово многообразие. **Риманов конус** S это произведение $S\times\mathbb{R}^{>0}$, снабженное метрикой t^2g+dt^2, где t - координатная функция на $\mathbb{R}^{>0}$. **Сасакиева структура** на многообразии S это комплексная структура на конусе S такая, что коническая метрика $t^2 g + dt^2$ является кэлеровой, а отображение $(s,t) \longrightarrow (s, qt)$ голоморфно для любого $q \in \mathbb{R}^{>0}$.

Пример 1.18: Конус для $2n-1$-мерной сферы это $R^{2n} \backslash 0$, с плоской метрикой. Отождествляя R^{2n} с $\mathbb{C}^n$, мы получаем комплексную структуру на конусе S^{2n-1}. Легко видть, что таким образом на сфере задается сасакиева структура (докажите это).

Пусть $\psi: \; S \longrightarrow S$ - сасакиев автоморфизм, а $q > 1$ - вещественное число. Легко видеть, что $(s,t) \longrightarrow (\psi(s), qt)$ – голоморфная гомотетия конуса S. Как и для поверхности Хопфа, можно определить фактор конуса по группе, порожденной этой гомотетией, и этот фактор будет локально конформно кэлеровым многообразием.

Определение 1.19. Компактное LCK-многообразие M, полученное такой конструкцией, называется **Вайсмановым**.

Замечание 1.20. Есть довольно много определений вайсманова многообразия, но в компактном случае они все равносильны вышеприведенному. Сасакиево многообразие S и автоморфизм ψ восстанавливаются однозначно по комплексной и конформной структуре на M.

Замечание 1.21. Рассмотрим векторное поле $\frac{d}{dt}$ на кэлеровом конусе

$$C(S) = S \times \mathbb{R}^{>0}.$$

Поскольку $\frac{d}{dt}$ действует на $C(S)$ голоморфными гомотетиями, производная Ли кэлеровой формы ω вдоль $\frac{d}{dt}$ равна ω. По формуле Картана, это дает

$$\omega = \operatorname{Lie}_{\frac{d}{dt}} \omega = d\left(\omega \lrcorner \frac{d}{dt}\right) - (d\omega) \lrcorner \frac{d}{dt} = d\left(\omega \lrcorner \frac{d}{dt}\right) = d(I(dt)).$$

Мы получаем, что $\omega = dd^c\phi$, где ϕ действует как $(s,t) \xrightarrow{\phi} t$, а $d^c := -IdI$. Функция ϕ, удовлетворяющая условию $\omega = dd^c\phi$, называется **кэлеровым потенциалом**. Мы получили, что на конусе сасакиева многообразия функция $(s,t) \xrightarrow{\phi} t$ задает кэлеров потенциал.

Замечание 1.22. Вайсмановы многообразия – никогда не кэлеровы. Можно убедиться в этом, например, так. Рассмотрим кэлеров потенциал на конусе сасакиева многообразия: $(s,t) \xrightarrow{\phi} t$. Формула для производной логарифма дает

$$dd^c \log \phi = \frac{\omega}{\phi} - \frac{d\phi \wedge I(d\phi)}{\phi^2}.$$

Нетрудно убедиться, что форма $\omega_0 := dd^c \log \phi$ имеет те же собственные значения, что $\frac{\omega}{\phi}$, на пространстве ортогональном $\Sigma = \langle \frac{d}{dt}, I(\frac{d}{dt})\rangle$, и равна нулю на Σ.

Поскольку стандартная гомотетия конуса умножает ϕ на число, $\log \phi$ меняется на константу, а $d \log \phi$ вообще не меняется. Значит, форма $dd^c \log \phi$ определена на вайсмановом факторе конуса (докажите это). Эта $(1,1)$-форма точна, и имеет неотрицательные собственные значения. Докажите, что на кэлеровом многообразии таких $(1,1)$-форм не бывает.

Следующая теорема принадлежит Ф. Белгуну ([Be1]). Она выводится из классификации Кодаиры.

Утверждение 1.23: Многообразиями Вайсмана являются все неалгебраические поверхности M с $\kappa(M) = 1$, а также первичные и вторичные поверхности Кодаиры.

Замечание 1.24. Вайсманово многообразие получается из сасакиева вышеописанной процедурой. Классификация трехмерных сасакиевых многообразий хорошо известна, благодаря Ф. Белгуну и Р. Гейгесу ([Be2]). Любое сасакиево 3-многообразие, не диффеоморфное сфере, получается как пространство единичных векторов в отрицательных линейных расслоениях на орбикривой рода $g > 0$. Это позволяет явно выписать, классифицировать и посчитать топологические инварианты всех неалгебраических поверхностей, кроме поверхностей класса VII.

Определение 1.25. Напомню, что орбикривая – это комплексное орбиобразие размерности 1. Орбиобразие (в 1950-е их называли **V-пространствами**, а сейчас – **стеками Делиня-Мамфорда**) это естественное обобщение понятия гладкого многообразия. Гладкое комплексное многообразие – многообразие, локально изоморфное шару в $\mathbb{C}^n$, причем функции переклейки уважают голоморфную структуру на пересечении шаров. Орбиобразие – многообразие, локально изоморфное шару в $\mathbb{C}^n/G$, где G - конечная группа, причем функции переклейки уважают голоморфную структуру и действие конечной группы. Орбиобразие, таким образом, задается атласом; измельчение атласов определяется таким же образом, как и для многообразий. Орбиобразия изоморфны, если у их атласов есть одинаковое измельчение

Замечание 1.26. Надо отметить, что структура орбиобразия содержит в себе дополнительные данные по отношению к структуре комплексного многообразия. Скажем, фактор $\mathbb{C}P^1$ по конечной группе G, как комплексное многообразие, всегда изоморфен $\mathbb{C}P^1$ (проверьте это), но соответствующее орбиобразие всегда помнит действие группы G.

Замечание 1.27. Кэлеровы формы, комплекс де Рама, векторные расслоения, классы Черна, в общем почти всю алгебраическую геометрию и топологию можно строить на орбиобразиях, в большинстве ситуаций определения переносятся дословно. При попытке посчитать какие-нибудь инварианты могут случаться парадоксы, например, эйлерова характеристика орбиобразия часто оказывается дробной.

Упражнение 1.28: Пусть G - компактная, связная группа Ли, действующая на многообразии M, причем все орбиты G одинаковой размерности. Докажите, что факторпространство M/G - орбиобразие.

Замечание 1.29. Поскольку на одномерном диске D может действовать автоморфизмами только циклическая группа $\mathbb{Z}_n$, орбикривые покрывают карты вида $D/\mathbb{Z}_n$. В любой точке такой карты, кроме нуля, орбикривая гладкая (изоморфна диску без действия группы). В особых точках (они изолированные, и их называют орбитОчками) орбикривая изоморфна $D/\mathbb{Z}_n$. Циклическая $\mathbb{Z}_n$ называется **стабилизатором орбиточки**, а n ее **порядком**. Морфизм орбикривых есть голоморфное отображение соответствующих комплексных кривых, переводящее орбиточки в орбиточки, и коммутирующее с действием стабилизаторов.

Замечание 1.30. Хорошим примером орбикривой является модулярная кривая (классифицирующее пространство эллиптических кривых): это $\mathbb{C}P^1$ с тремя орбиточками порядка 2, 2 и 3, а ее фундаментальная группа бесконечна, и изоморфна $SL(2,\mathbb{Z})$.

Задачи.

Задача 1.1. Пусть $M \longrightarrow X$ – голоморфное, локально тривиальное расслоение на поверхности M со слоем $\mathbb{C}P^1$. Найдите размерность Кодаиры $\kappa(M)$.

Задача 1.2. Пусть $M = X_1 \times X_2$ – произведение двух кривых, а L – линейное расслоение, которое обильно при ограничении на $X_1 \times \{x\}$ и $\{y\} \times X_2$. Всегда ли L обильно?

Задача 1.3. Постройте левоинвариантную симплектическую форму на (главной) поверхности Кодаиры.

Задача 1.4. Найдите числа Бетти поверхности Кодаиры.

Задача 1.5. Постройте ненулевую левоинвариантную $(1,1)$-форму ω_0 на поверхности Кодаиры M, такую, что $\omega_0(x, Ix) \geqslant 0$ для любого касательного вектора $x \in TM$

Задача 1.6 (*). Найдите группу голоморфных автоморфизмов поверхности Кодаиры.

Задача 1.7. Пусть S - сасакиево многообразие, а $C(S) = S \times \mathbb{R}^{>0}$ - его риманов конус. Рассмотрим векторное поле $\frac{d}{dt}$, действующее на $C(S)$ голоморфными гомотетиями. Докажите, что поле $I\left(\frac{d}{dt}\right)$ действует на $C(S)$ голоморфными изометриями, и поднимается с поля r на S, причем r действует на S инфинитезимальными автоморфизмами сасакиевой структуры.

Замечание 1.8. Это векторное поле называется **полем Риба** (Reeb field) сасакиева многообразия. Если его орбиты компактны, сасакиево многообразие называется **квазирегулярным**

Задача 1.9. Пусть M - квазирегулярное сасакиево многообразие. Докажите, что пространство орбит поля Риба - кэлерово орбиобразие.

Задача 1.10. Докажите, что каждое квазирегулярное сасакиево многообразие получается как тотальное пространство единичных векторов в линейном расслоении на кэлеровом орбиобразии.

Задача 1.11. Пусть X – кривая рода $g > 0$, со структурой орбиобразия. Докажите, что у X есть конечное накрытие в категории орбиобразий $\tilde{X} \longrightarrow X$, причем $\tilde{X}$ – гладкая кривая (без орбиточек).

Литература:

[BPV] Barth W., Peters C., Van de Ven A. *Compact complex surfaces*, 1984 (библиотека "Колхоз").

[Be1] F. A. Belgun, *On the metric structure of non-Kähler complex surfaces*, Math. Ann. **317** (2000), 1–40.

[Be2] F.A. Belgun, *Normal CR structures on compact 3-manifolds*, Math. Z. **238** (2001), 441–460.

[H] Keizo Hasegawa Complex and Kahler structures on Compact Solvmanifolds, J. Symplectic Geom. Volume 3, Number 4 (2005), 749-767, arXiv:0804.4223.

[T] Matei Toma, *Holomorphic vector bundles on non-algebraic surfaces*, `http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/staff/phpages/tomam/dissertation.html` (Ph. D. thesis, Bayreuth, 1992)