Комплексные поверхности, задачи для экзамена.

Для сдачи экзамена с оценкой $5-k$ достаточно решить $7-k$ задач из списка.

Задача 1.1. Пусть M некэлерова поверхность, расслоенная над кривой, C гладкая, связная кривая, $C \longrightarrow M$ нетривиальное голоморфное отображение. Докажите, что род C не больше 1.

Задача 1.2. Пусть V топологическое векторное пространство, а $V^\check{}$ - пространство непрерывных функционалов на V, с топологией равномерной сходимости на компактах. Докажите, что естественное отображение $V \longrightarrow V^{\check{}\check{}}$ является изоморфизмом для любого пространства Фреше.

Задача 1.3. Пусть M - поверхность с $b_1(M) = 1$, универсальное накрытие которой изоморфно $\mathbb{C}^2\backslash 0$ (такая поверхность называется **поверхность Хопфа**). Выберем какую-нибудь метрику Годушона на M. Будет ли TM стабильно относительно этой метрики?

Задача 1.4. Пусть M поверхность Хопфа, с заданной на ней метрикой Годушона, а K_M – каноническое расслоение. Докажите, что $\deg K_M < 0$.

Задача 1.5. Пусть (M, ω) – 3-мерное компактное комплексное эрмитово многообразие, удовлетворяющее $d(\omega^2) = 0$ и $dd^c\omega = 0$. Докажите, что $d\omega = 0$.

Задача 1.6. Пусть (M, ω) компактное комплексное эрмитово многообразие, удовлетворяющее $d\omega = \omega \wedge \theta$ для какой-то замкнутой 1-формы θ (такое многообразие называется локально конформно кэлеровым). Предположим, что θ не точно. Докажите, что M не допускает кэлеровой метрики.

Задача 1.7. Пусть M комплексная поверхность без кривых, а F фильтруемое 2-мерное расслоение. Докажите, что F это расширение линейного расслоения с помощью линейного.

Задача 1.8. Пусть M - компактное, комплексное n-мерное многообразие, не допускающее эрмитовой метрики ω с $dd^c\omega = 0$. Докажите, что на M существует dd^c-точный, положительный $(n-1, n-1)$-поток.

Задача 1.9. Пусть M комплексная, кэлерова поверхность, а $\alpha \in H^{1,1}(M)$ – вещественный класс когомологий. Докажите, что класс α не кэлеров тогда и только тогда, когда существует ненулевой положительный, замкнутый (1,1)-поток ξ, удовлетворяющий $\langle \alpha, \xi \rangle \leqslant 0$.