Для зачета по каждому листку надо сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Анализ 8: Алгебра де Рама

8.1. Кэлеровы дифференциалы

Определение 8.1. Пусть R есть кольцо над полем k, а V – R-модуль. k-линейное отображение $D: R \longrightarrow V$ называется **дифференцированием**, если $D(ab) = aD(b) + bD(a)$. Обозначим за $\operatorname{Der}_k(R, V)$ пространство дифференцирований из R в V.

Задача 8.1. Докажите, что $\operatorname{Der}_k(R, V)$ снабжено естественной структурой R-модуля.

Задача 8.2. Пусть $[K : k]$ - конечное расширение поля характеристики 0, а V – векторное пространство над K. Докажите, что пространство $\operatorname{Der}_k(K, V)$ дифференцирований из K в V нулевое.

Задача 8.3. Пусть M – гладкое многообразие, $x \in M$ точка, $R = C^\infty M$, и $\mathfrak{m}_x \subset R$ – ее максимальный идеал. Рассмотрим R-модуль $V := R/\mathfrak{m}_x$. Найдите размерность пространства $\operatorname{Der}_k(R, V)$.

Задача 8.4 (*). Может ли существовать нетривиальное дифференцирование $\nu \in \operatorname{Der}_k(R, V)$, где R – кольцо непрерывных $\mathbb{R}$-значных функций на многообразии, а V – R-модуль, одномерный над $\mathbb{R}$?

Определение 8.2. Пусть R – кольцо над полем k. Определим R-модуль $\Omega^1 R$, задав его образующими и соотношениями, следующим образом. Образующие $\Omega^1 R$ пронумерованы элементами R; для каждого $a \in R$, соответствующий ему элемент в $\Omega^1 R$ обозначается da. Соотношения в $\Omega^1 R$ порождаются выражениями вида $d(ab) = adb + bda$, и $d\lambda = 0$, для каждого $\lambda \in k$. Модуль $\Omega^1 R$ называется **модулем кэлеровых дифференциалов над** R.

Задача 8.5. Докажите, что естественное отображение $R \longrightarrow \Omega^1 R$, $a \mapsto da$ – дифференцирование.

Задача 8.6. Пусть R кольцо над k, мультипликативно порожденное над k элементами $r_1, ..., r_k \in R$. Докажите, что $\Omega^1 R$ порожден (как R-модуль) элементами $dr_1, ..., dr_k$.

Задача 8.7 (!). Докажите, что $\operatorname{Der}_k(R) = \operatorname{Hom}_R(\Omega^1 R, R)$.

Задача 8.8 (!). Пусть V – R-модуль, а $D \in \operatorname{Der}_k(R, V)$ – дифференцирование. Докажите, что существует и единственен гомоморфизм R-модулей $\phi_D: \Omega^1 R \longrightarrow V$, который делает следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "D"'] & \Omega^1 R \arrow[d, "\phi_D"] \\ & V \end{tikzcd}$$

Замечание. Это свойство часто берут за определение модуля $\Omega^1 R$.

Задача 8.9 (!). Пусть $R = k[t_1, ..., t_n]$ – кольцо полиномов над полем характеристики ноль. Докажите, что $\Omega^1_k R$ – свободный R-модуль, порожденный $dt_1, dt_2, ..., dt_n$.

Задача 8.10 (*). Пусть задан идеал $I \subset R$. Постройте точную последовательность

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega^1(R) \otimes_R R/I \longrightarrow \Omega^1(R/I) \longrightarrow 0.$$

Задача 8.11. Пусть $R \xrightarrow{\phi} R'$ – гомоморфизм колец. Рассмотрим $\Omega^1 R'$ как R-модуль. Докажите, что существует гомоморфизм R-модулей $\Omega^1 R \longrightarrow \Omega^1 R'$, переводящий dr в $d\phi(r)$. Докажите, что такой гомоморфизм – единственный.

Определение 8.3. В этом случае, говорится, что гомоморфизм $\Omega^1 R \longrightarrow \Omega^1 R'$ **индуцирован** ϕ.

Задача 8.12 (*). Пусть R – кольцо непрерывных функций на многообразии, а $\mathfrak{m}_x$ – максимальный идеал точки. Докажите, что $\mathfrak{m}_x \Omega^1 R = \Omega^1 R$.

8.2. Кокасательное расслоение

Определение 8.4. Пусть A, B – R-модули, а $\nu: A \times B \longrightarrow R$ – билинейное спаривание. Оно называется **невырожденным**, если для каждого $a \in A$ найдется $b \in B$, для которого $\nu(a,b) \neq 0$, и для каждого $b \in B$ найдется $a \in A$, для которого $\nu(a,b) \neq 0$.

Задача 8.13. Пусть A, B – векторные пространства, а $\nu: A \times B \longrightarrow k$ – невырожденное спаривание. Всегда ли A изоморфно B^*?[1]

Задача 8.14 (*). Пусть A, B – конечно-порожденные R-модули, а $\nu: A \times B \longrightarrow R$ – невырожденное спаривание. Всегда ли A изоморфно B^*?

Задача 8.15 (!). Пусть A – свободный, конечно-порожденный R-модуль, а $\nu: A \times B \longrightarrow R$ – невырожденное спаривание. Докажите, что B тоже свободно, и изоморфно A^*.

Определение 8.5. Пусть A, B – порожденные R-модули, а $\nu: A \times B \longrightarrow R$ – билинейное спаривание. Определим **аннулятор ν в B** как подмодуль, состоящий из векторов $b \in B$, для которых $\nu(\cdot, b): A \longrightarrow R$ равно нулю.

Определение 8.6. Пусть M – гладкое многообразие, $R := C^\infty M$ – кольцо гладких функций, а $\nu: \operatorname{Der}(R) \times \Omega^1 R \longrightarrow R$ – естественное спаривание, построенное в задаче 8.7. Пусть $K \subset \Omega^1 R$ – аннулятор спаривания. Определим **кокасательное расслоение** как $\Lambda^1 M := \Omega^1 R / K$.

Задача 8.16. Докажите, что естественное спаривание $\nu: \operatorname{Der}(C^\infty M) \times \Lambda^1 M \longrightarrow R$ билинейно и невырождено.

Задача 8.17. Пусть $R := C^\infty \mathbb{R}^n$, $t_1, ..., t_n \in R$ – координатные функции, $P = \sum_{i=1}^n P_i dt_i$ – элемент в $\Lambda^1 \mathbb{R}^n$, $Q = \sum_{i=1}^n Q_i \frac{d}{dt_i} \in \operatorname{Der}_k(R)$ – векторное поле, а $\nu: \operatorname{Der}(R) \times \Lambda^1 \mathbb{R}^n \longrightarrow R$ – естественное спаривание. Докажите, что $\nu(P, Q) = \sum_i P_i Q_i$.

Задача 8.18 (!). В этих предположениях, докажите, что $\Lambda^1 R$ – свободный $\mathbb{R}$-модуль, порожденный $dt_1, ..., dt_n$.

Указание. Докажите, что $\operatorname{Der}(R) = \operatorname{Hom}_R(\Omega^1 R, R)$, а модуль $\operatorname{Der}(R)$ – свободный над R. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 8.19 (!). Пусть A, B – конечно-порожденные проективные R-модули, а $\nu: A \times B \longrightarrow R$ – невырожденное спаривание. Докажите, что $B \cong A^*$.

Задача 8.20 (!). Пусть M – гладкое многообразие, а $TM = \operatorname{Der}(C^\infty M)$ – пространство дифференцирований. Докажите, что $\Lambda^1 M = \operatorname{Der}(C^\infty M)^*$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей, и примените теорему Серра-Суона.

[1] B^* обозначает R-модуль $\operatorname{Hom}_R(B, R)$.

Задача 8.21 (*). Пусть K – ядро естественной проекции $\Omega^1 C^\infty M \longrightarrow \Lambda^1 M$. Докажите, что $\mathfrak{m}_x K = K$ для каждого максимального идеала точки $x \in M$.

Задача 8.22 (**). Докажите, что K непуст.

Задача 8.23 (*). Пусть M – гладкое многообразие, $M \xrightarrow{\Delta} M \times M$ – диагональное вложение, а $I \subset C^\infty M \times M$ – идеал функций, которые зануляются на Δ.

а. Докажите, что кольцо $C^\infty(M \times M)/I$ изоморфно $C^\infty M$.

б. Докажите, что естественное отображение $C^\infty M \times M \longrightarrow \operatorname{End}_{C^\infty M \times M}(I/I^2)$ пропускается через проекцию
$$C^\infty(M \times M) \longrightarrow C^\infty(M \times M)/I = C^\infty M.$$
Выведите из этого, что пространство I/I^2 снабжено естественной структурой $C^\infty M$-модуля.

в. Докажите, что I/I^2 изоморфно $\Lambda^1 M$ как $C^\infty M$-модуль.

8.3. Алгебра де Рама

Определение 8.7. Пусть M – гладкое многообразие. Обозначим за $\Lambda^i M$ расслоение дифференциальных i-форм на M, то есть антисимметричных i-форм на TM.

Задача 8.24. Пусть $\bigotimes_k T^*M \xrightarrow{\Pi} \Lambda^k M$ – отображение антисимметризации. Определим умножение $\Lambda^i M \times \Lambda^j M \longrightarrow \Lambda^{i+j} M$ как $\alpha \wedge \beta \longrightarrow \Pi(\alpha \otimes \beta)$, где $\alpha \otimes \beta$ – сечение $\Lambda^i M \otimes \Lambda^j M \subset \bigotimes_{i+j} T^*M$, полученное перемножением α и β. Докажите, что это умножение ассоциативно, и удовлетворяет $\alpha \wedge \beta = (-1)^{ij} \beta \wedge \alpha$.

Определение 8.8. Алгебра $\Lambda^* M := \oplus_i \Lambda^i M$ с определенной выше алгебраической структурой называется **алгеброй де Рама** многообразия.

Задача 8.25. Докажите, что алгебра $\Lambda^* M$ мультипликативно порождена $C^\infty M = \Lambda^0 M$ и 1-формами вида df, где $f \in C^\infty M$.

Задача 8.26. Докажите, что дифференцирование на алгебре однозначно задается своими значениями на любом наборе мультипликативных образующих алгебры.

Определение 8.9. Дифференциал де Рама $d: \ \Lambda^* M \longrightarrow \Lambda^{*+1} M$ есть $\mathbb{R}$-линейное отображение, которое удовлетворяет следующим условиям.

(i) Для любого $f \in \Lambda^0 = C^\infty M$, df есть элемент $\Lambda^1 M$, который равен образу соответствующего кэлерова дифференциала $df \in \Omega^1 M$.

(ii) (Правило Лейбница) $d(a \wedge b) = da \wedge b + (-1)^j a \wedge db$, для любых $a \in \Lambda^i M, b \in \Lambda^j M$.

(iii) $d^2 = 0$.

Задача 8.27 (!). Докажите, что дифференциал де Рама единственный, если существует.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 8.28. Пусть $t_1, ..., t_n$ – координатные функции на $\mathbb{R}^n$, а $\alpha \in \Lambda^* \mathbb{R}^n$ – какой-то моном, полученный произведением нескольких dt_i. Докажите, что дифференциал де Рама на $C^\infty \mathbb{R}^n$ задается оператором, который переводит $f\alpha$ в $\sum_i \frac{df}{dt_i} dt_i \wedge \alpha$, для любого $f \in C^\infty \mathbb{R}^n$.

Задача 8.29.

а. Докажите, что дифференциал де Рама $d: \Lambda^* M \longrightarrow \Lambda^{*+1} M$ коммутирует с гомоморфизмом ограничения на открытое подмножество.

б. Выведите из этого, что дифференциал де Рама задает морфизм пучков.

Указание. Воспользуйтесь единственностью дифференциала де Рама.

Задача 8.30 (!). Докажите, что на любом многообразии существует дифференциал де Рама.

Указание. Локально, дифференциал де Рама построен в задаче 8.28. Чтобы перейти от локального к глобальному, воспользуйтесь предыдущей задачей, и примените аксиомы пучка.

Задача 8.31 (*). Пусть R – кольцо над полем, а $\Omega^i R := \Lambda^i_R \Omega^1 R$ внешняя алгебра, порожденная кэлеровыми дифференциалами. Докажите, что существует дифференциал де Рама $d: \ \Omega^* R \longrightarrow \Omega^{*+1} R$, удовлетворяющий вышеприведенным аксиомам.

8.4. Производная Ли

Определение 8.10. Пусть $A^* = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ – градуированная алгебра над полем. Она называется **суперкоммутативной**, если $ab = (-1)^{ij} ba$ для любых $a \in A^i, b \in A^j$.

Замечание. Грассманова алгебра $\Lambda^* V$, очевидно, суперкоммутативна

Задача 8.32. Пусть A^*, B^* – градуированные суперкоммутативные алгебры, а $A^* \otimes B^*$ их тензорное произведение, с градуировкой $(A^* \otimes B^*)^p := \oplus_{i+j=p} A^i \otimes B^j$, и умножением, определенным формулой $a \otimes b \cdot a' \otimes b' = (-1)^{ij} aa' \otimes bb'$, где $a' \in A^i, b \in B^j$. Докажите, что оно суперкоммутативно.

Задача 8.33. Пусть V, W – векторные пространства, $A^* := \Lambda^* V, B^* := \Lambda^* W$ их суперbegin алгебры. Докажите, что $\Lambda^*(V \oplus W)$ изоморфно тензорному произведению $A^* \otimes B^*$, определенному, как в прошлой задаче.

Определение 8.11. Пусть A^* – суперкоммутативная алгебра, а $D: \ A^* \longrightarrow A^{*+i}$ – отображение, сдвигающее градуировку на i. Оно называется **супердифференцированием**, если $D(ab) = D(a)b + (-1)^{ij} aD(b)$, для любого $a \in A^j$.

Замечание. Если i четно, супердифференцирование это просто дифференцирование. Если нечетно, оно называется **нечетным дифференцированием**.

Замечание. Дифференциал де Рама является нечетным дифференцированием (по определению).

Определение 8.12. Пусть M – гладкое многообразие, а $X \in TM$ – векторное поле. Рассмотрим операцию **подстановки векторного поля** $i_X: \ \Lambda^i M \longrightarrow \Lambda^{i-1} M$, переводящую i-форму α в $(i-1)$-форму $v_1, ..., v_{i-1} \longrightarrow \alpha(X, v_1, ..., v_{i-1})$

Задача 8.34. Докажите, что i_X есть нечетное дифференцирование.

Задача 8.35 (*). Пусть $D: \ A^* \longrightarrow A^{*+i}$ – линейный оператор, причем $i \neq 0$. Докажите, что $e^D := 1 + D + \frac{D^2}{2} + ... + \frac{D^i}{i!} + ...$ это автоморфизм A^* тогда и только тогда, когда D это супердифференцирование.

Определение 8.13. Пусть A^* – градуированное векторное пространство, а $E: \ A^* \longrightarrow A^{*+i}$, $F: \ A^* \longrightarrow A^{*+j}$ – операторы, сдвигающие градуировку на i, j. Определим **суперкоммутатор**

$$\{E, F\} := EF - (-1)^{ij} FE$$

Замечание. Эндоморфизм, сдвигающий градуировку на i, называется **четным**, если i четно, и **нечетным** в противном случае.

Задача 8.36. Докажите, что суперкоммутатор удовлетворяет **супертождеству Якоби,**

$$\{E, \{F, G\}\} = \{\{E, F\}, G\} + (-1)^{\tilde{E}\tilde{F}}\{F, \{E, G\}\}$$

где $\tilde{E}$ и $\tilde{F}$ четные, если E, F четные, и нечетные в противном случае.

Замечание. Есть простое мнемоническое правило, позволяющее запоминать супертождества, если известен коммутативный аналог. Всякий раз, когда в коммутативном случае меняются местами две буквы, в суперкоммутативном надо домножить на -1, если эти две буквы соответствуют нечетным операторам.

Задача 8.37. Пусть A^* – суперкоммутативная алгебра, $a \in A$. Обозначим за $L_a : A \longrightarrow A$ эндоморфизм, переводящий b в ab. Докажите, что D является супердифференцированием тогда и только тогда, $D(1) = 0$ и для каждого $a \in A^i$, суперкоммутатор $\{D, L_a\}$ равен L_b для какого-то $b \in A^*$.

Задача 8.38 (!). Докажите, что суперкоммутатор супердифференцирований – снова супердифференцирование.

Указание. Воспользуйтесь супертождеством Якоби, и примените предыдущую задачу.

Определение 8.14. Пусть M – гладкое многообразие, а $v \in TM$ – векторное поле. Эндоморфизм $\operatorname{Lie}_v : \Lambda^*M \longrightarrow \Lambda^*M$, сохраняющий градуировку, называется **производной Ли вдоль** v, если он обладает следующими свойствами

(i) На функциях, Lie_v равно производной вдоль v.

(ii) $[\operatorname{Lie}_v, d] = 0$

(iii) Lie_v – дифференцирование.

Задача 8.39. Докажите, что производная Ли вдоль v однозначно задана свойствами (i)-(iii).

Указание. Воспользуйтесь тем же аргументом, который использовался для доказательства единственности дифференциала де Рама.

Задача 8.40. Докажите, что $\{d, \{d, E\}\} = 0$, для любого $E \in \operatorname{End}(\Lambda^*M)$.

Указание. Воспользуйтесь супер-тождеством Якоби.

Задача 8.41. Докажите, что $\{d, i_v\}$ коммутирует с d, где $i_v : \Lambda^*M \longrightarrow \Lambda^{*-1}M$ – подстановка v в форму.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 8.42 (!). (Формула Картана) Докажите, что $\{d, i_v\}$ – производная Ли вдоль v.

Задача 8.43 (*). Пусть $v, v' \in TM$ – два векторных поля, а $i_{v\otimes v'} : \Lambda^*M \longrightarrow \Lambda^{*-2}M$ – подстановка v, v' в 2-форму, $i_{v\otimes v'} = i_v i_{v'}$. Рассмотрим i-форму $\alpha \in \Lambda^*M$, и пусть L_α – оператор умножения на α. Докажите, что оператор

$$x \longrightarrow [i_{v\otimes v'}, L_\alpha](x) - L_{i_{v\otimes v'}}(\alpha) \wedge x$$

является дифференцированием.

8.5. Лемма Пуанкаре

Задача 8.44. Пусть t – координатная функция на прямой, $f(t) \in C^\infty\mathbb{R}$ – функция, $f(0) = 0$, а $v := t\frac{d}{dt}$ – векторное поле. Докажите, что интеграл

$$R(f)(t) := \int_1^0 \frac{f(\lambda t)}{\lambda} d\lambda$$

сходится, и удовлетворяет $\operatorname{Lie}_v R(f) = f$.

Задача 8.45. Пусть $t_1, ..., t_n$ – координаты в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим радиальное поле $v := \sum_i t_i \frac{d}{dt_i}$. Пусть $f \in C^\infty\mathbb{R}^n$ – функция, которая удовлетворяет $f(0) = 0$, а $x = (x_1, ..., x_n)$ – точка в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что интеграл

$$R(f)(x) := \int_1^0 \frac{f(\lambda x)}{\lambda} d\lambda$$

сходится, и удовлетворяет $\operatorname{Lie}_v R(f) = f$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей

Определение 8.15. Открытое подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ называется **звездчатым**, если для любой точки $x \in U$, отрезок $[0, x]$ лежит в U.

Задача 8.46. Докажите, что любая форма $\alpha \in \Lambda^i U$ на звездчатом множестве U, удовлетворяющая $\operatorname{Lie}_v \alpha = 0$, зануляется, если $i > 0$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей. Проверьте сходимость интеграла.

Задача 8.47 (!). Пусть U – звездчатое подмножество в $\mathbb{R}^n$, а $i > 0$. Постройте оператор

$$R : \Lambda^i U \longrightarrow \Lambda^i U$$

такой, что $\operatorname{Lie}_v R\alpha = R \operatorname{Lie}_v \alpha = \alpha$ для всех $\alpha \in \Lambda^i U$.

Задача 8.48 (!). Докажите, что $\{R, d\} = 0$

Указание. Проверьте, что $\{R, d\} \operatorname{Lie}_v \alpha = Rd \operatorname{Lie}_v \alpha + dR \operatorname{Lie}_v \alpha = -R \operatorname{Lie}_v d\alpha + d\alpha = 0$. Воспользуйтесь обратимостью Lie_v.

Задача 8.49. Докажите, что $\{d, i_v\} R(\alpha) = \alpha$, для любой i-формы α на звездчатом множестве, $i > 0$.

Определение 8.16. Форма вида $d\alpha$ называется **точной**, форма, на которой зануляется дифференциал – **замкнутой**. Поскольку $d^2 = 0$, любая точная форма замкнута. **i-е когомологии де Рама многообразия** M – фактор замкнутых i-форм по точным, обозначается $H^i(M)$.

Задача 8.50. Вычислите нулевые когомологии де Рама связного многообразия.

Задача 8.51 (!). Пусть $\alpha \in \Lambda^i U$ – замкнутая форма на звездчатом множестве U, где $i > 0$. Докажите, что $\alpha = d i_v R(\alpha)$.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 8.52 (!). (лемма Пуанкаре) Пусть U – звездчатое множество, Докажите, что $H^i(U) = 0$ для всех $i > 0$.

Задача 8.53 (*). Пусть на $\mathbb{R}^n$ задано векторное поле v, с единственным нулем в точке x. Предположим, что производная $Dv\big|_x$ в x невырождена как отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, причем любая интегральная траектория v проходит через x. Докажите, что производная Ли Lie_v обратима на $\Lambda^i \mathbb{R}^n$ для любого $i > 0$.

8.6. Прямой и обратный образ формы

Определение 8.17. Пусть $M \xrightarrow{\phi} N$ – морфизм гладких многообразий, а $\Lambda^1 N \xrightarrow{\phi^*} \Lambda^1 M$ – индуцированное отображение, переводящее fdg в $\phi^* f d\phi^* g$. Форма $\phi^*\alpha$ называется **обратным образом** α.

Задача 8.54. Докажите, что ϕ^* продолжается с $\Lambda^1 N$ до мультипликативного гомоморфизма

$$\phi^* : \Lambda^* N \longrightarrow \Lambda^* M.$$

Определение 8.18. **Обратным образом** i-формы α называется $\phi^*\alpha$, определенный как в предыдущей задаче. Если $M \xrightarrow{\phi} N$ это замкнутое вложение, форма $\phi^*\alpha$ называется **ограничением** α на $M \hookrightarrow N$.

Задача 8.55. Пусть $x \in T_m M$ – касательный вектор, а $\alpha \in \Lambda^1 N$ – 1-форма. Докажите, что $\phi^*\alpha(x) = \alpha\left(D_\phi(x)\right)$, где $D_\phi : T_m M \longrightarrow T_{\phi(m)} N$ это дифференциал.

Задача 8.56 (!). Докажите, что $\phi^* d\alpha = d\phi^*\alpha$.

Определение 8.19. Дифференциальная форма α называется **формой с компактным носителем**, если $\alpha = 0$ вне какого-то компактного множества.

Определение 8.20. Пусть M – n-мерное многообразие, а $\Lambda^n_c(M)$ – пространство n-форм с компактным носителем. Определим **интеграл** $\int_M : \Lambda^n_c(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ как отображение, которое удовлетворяет следующим свойствам.

(i) $\int_M (\alpha + \beta) = \int_M \alpha + \int_M \beta$.

(ii) $\int_M \phi^*\alpha = \int_N \alpha$, для любого собственного отображения $M \xrightarrow{\phi} N$ и $\alpha \in \Lambda^n_c(N)$.

(iii) Для любого гладкого, собственного отображения $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\phi} M$, и формы $\alpha \in \Lambda^n_c(M)$, имеем $\int_M \alpha = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$, где $d\mu$ есть обычная мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, $f = \frac{\phi^*\alpha}{\operatorname{Vol}\mathbb{R}^n}$, а $\operatorname{Vol}\mathbb{R}^n$ – стандартная форма объема, $\operatorname{Vol}\mathbb{R}^n = dt_1 \wedge dt_2 \wedge ... \wedge dt_n$.

Задача 8.57 (!). Докажите, что интеграл, определенный вышеприведенными аксиомами, существует, и единственен.

Определение 8.21. Пусть $N \xrightarrow{\pi} M$ – неособый морфизм многообразий, со слоями размерности k, а $\alpha \in \Lambda^{i+k}_c N$ – форма с компактным носителем. **Прямой образ** $\pi_*\alpha \in \Lambda^i_c M$ определяется как форма, которая удовлетворяет

$$\int_M \pi_*\alpha \wedge \beta = \int_N \alpha \wedge \pi^*\beta,$$

для любой формы $\beta \in \Lambda^{\dim M - i} M$.

Задача 8.58 (!). Докажите, что $\pi_*\alpha$ определяется этой формулой однозначно.

Задача 8.59 (*). Докажите, что $\pi_*\alpha \in \Lambda^i_c M$ определен для любой $\alpha \in \Lambda^{i+k}_c N$

Указание. Это "интеграл вдоль слоев" π.

Задача 8.60 (*). Докажите, что $\pi_* d\alpha = d\pi_*\alpha$.

Задача 8.61 (*). Пусть α – $(n-1)$-форма с компактным носителем на многообразии M с краем ∂M. Определим $\int_{\partial M} \alpha$ как интеграл от ограничения (обратного образа) α на ∂M. Докажите **формулу Стокса**:

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha.$$

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей, и примените индукцию.