Для зачета по каждому листку надо сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Анализ 6: Теорема Серра-Суона

6.1. Морфизмы векторных расслоений

Определение 6.1. Пусть $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ – пучки над M. **Морфизм** из $\mathcal{B}$ v $\mathcal{B}'$ есть гомоморфизм $\mathcal{B}(U) \longrightarrow \mathcal{B}'(U)$, заданный для каждого открытого множества $U \subset M$, и совместимый с гомоморфизмами ограничений:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B}'(U) \arrow[d] \\ \mathcal{B}(U_1) \arrow[r] & \mathcal{B}'(U_1) \end{tikzcd}$$

Замечание. Морфизмы пучков модулей определяются аналогично.

Определение 6.2. Морфизм пучков называется **инъективным**, если он инъективен на ростках, и **сюрьективным**, если он сюрьективен на ростках.

Задача 6.1. Пусть $\mathcal{B} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}'$ – инъективный морфизм пучков. Докажите, что ϕ инъективен на глобальных сечениях.

Задача 6.2 (*). Приведите пример сюрьективного морфизма пучков, который не сюрьективен на глобальных сечениях.

Определение 6.3. Пусть $\mathcal{B} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}'$ – морфизм локально тривиальных пучков $C^\infty M$-модулей. Он называется **морфизмом расслоений**, если ϕ в каждом слое $\mathcal{B}\big|_x \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}'\big|_x$ имеет один и тот же ранг.

Задача 6.3 (!). Приведите пример инъективного морфизма локально тривиальных пучков $C^\infty M$-модулей, который в каком-то слое не инъективен.

Задача 6.4 (*). Докажите, что сюрьективный морфизм локально тривиальных пучков $C^\infty M$-модулей является морфизмом векторных расслоений.

Задача 6.5 (!). Пусть $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_1$ – морфизм расслоений над M. Докажите, что соответствующее отображение тотальных пространств –

а. неособый морфизм многообразий

б. Докажите, что оно является гомоморфизмом относительных векторных пространств над M.

Задача 6.6 (*). Любой ли гомоморфизм относительных векторных пространств

$$\operatorname{Tot} \mathcal{B} \longrightarrow \operatorname{Tot} \mathcal{B}_1$$

получается таким образом?

Определение 6.4. Подрасслоением называется образ инъективного морфизма расслоений.

Задача 6.7. Пусть $B_1 \subset B$ – подрасслоение. Докажите, что факторпучок B/B_1 – тоже расслоение.

Задача 6.8 (!). Пусть $\mathcal{B}_1 \xrightarrow{\phi} \mathcal{B}_2$ – морфизм расслоений. Докажите, что образ ϕ – подрасслоение в $\mathcal{B}_2$, а ядро – подрасслоение в $\mathcal{B}_1$.

Определение 6.5. **Прямой суммой** расслоений называется прямая сумма соответствующих пучков.

Задача 6.9. Докажите, что тотальное пространство прямой суммы расслоений $\mathcal{B}\oplus\mathcal{B}'$ гомеоморфно $\operatorname{Tot}\mathcal{B}\times_M\operatorname{Tot}\mathcal{B}'$.

Задача 6.10 (!). Пусть $\mathcal{B}$ - векторное расслоение, снабженное метрикой (то есть положительно определенной билинейной симметрической формой), а $\mathcal{B}_1\subset\mathcal{B}$ – подрасслоение. Рассмотрим подмножество в $\operatorname{Tot}\mathcal{B}_1^\perp\subset\operatorname{Tot}\mathcal{B}$, состоящее из всех точек $v\in\mathcal{B}\big|_x$, ортогональных $\mathcal{B}_1\big|_x\subset\mathcal{B}\big|_x$. Докажите, что $\operatorname{Tot}\mathcal{B}_1^\perp$ – тотальное пространство подрасслоения $\mathcal{B}_1^\perp\subset\mathcal{B}$.

Определение 6.6. Подрасслоение $\mathcal{B}_1^\perp\subset\mathcal{B}$ называется **ортогональным дополнением** $\mathcal{B}$ к $\mathcal{B}_1\subset\mathcal{B}$.

Задача 6.11. Пусть $\mathcal{B}_1\subset\mathcal{B}$ – подрасслоение. Докажите, что $\mathcal{B}$ изоморфно прямой сумме $\mathcal{B}_1$ и еще одного расслоения.

Указание. Определите на $\mathcal{B}$ метрику, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Замечание. В такой ситуации, говорят, что $\mathcal{B}_1$ **является прямым слагаемым** $\mathcal{B}$.

6.2. Касательное расслоение

Задача 6.12 (!). Пусть $M\subset\mathbb{R}^n$ – гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$, а $TM\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ - множество всех пар $(v,x)\in M\subset\mathbb{R}^n$, где $x\in M\subset\mathbb{R}^n$ точка M, а $v\in\mathbb{R}^n$ - вектор, касательный к M в m, то есть удовлетворяющий условию

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{d(M,m+tv)}{t}\longrightarrow 0.$$

а. Докажите, что естественная аддитивная операция на $TM\subset M\times\mathbb{R}^n$ (сложение по второму аргументу) задает на TM структуру топологической группы над M.

б. Докажите, что домножение второго аргумента на элемент $\mathbb{R}$ задает на TM структуру относительного векторного пространства над M.

в. Докажите, что TM будет тотальным пространством векторного расслоения.

г. [!] Докажите, что это векторное расслоение изоморфно касательному расслоению, то есть пучку $\operatorname{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty M)$.

Замечание. Касательное расслоение к M, а равно и его тотальное пространство, обозначается TM.

Задача 6.13 (!). Пусть M – многообразие со счетной базой. Докажите, что TM допускает вложение в тривиальное расслоение.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей и примените теорему Уитни.

Задача 6.14 (!). Пусть B – векторное расслоение на M, а $\operatorname{Tot}B$ – его тотальное пространство. Пусть $T\operatorname{Tot}B$ – касательное расслоение, а $M\overset{\phi}{\hookrightarrow}\operatorname{Tot}B$ вложение, соответствующее нулевому сечению. Докажите, что обратный образ $\phi^*T\operatorname{Tot}B$ изоморфен (как расслоение) прямой сумме $TM\oplus B$.

Задача 6.15 (!). Докажите, что каждое расслоение на многообразии со счетной базой является прямым слагаемым тривиального.

Указание. Воспользуйтесь задачами 6.14 и 6.13.

Задача 6.16. Докажите, что TS^1 тривиально.

Задача 6.17 (!). Пусть M – многообразие, которое не ориентируемо. Докажите, что TM нетривиально.

Задача 6.18. Докажите, что TS^2 нетривиально.

Задача 6.19. Докажите, что любое одномерное расслоение на сфере S^2 тривиально.

Задача 6.20. Докажите, что TS^3 тривиально.

Задача 6.21 (*). Обозначим за $TS^2 \oplus \mathbb{R}$ прямую сумму TS^2 и тривиального 1-мерного расслоения. Будет ли $TS^2 \oplus \mathbb{R}$ тривиально?

Задача 6.22 (*). Пусть G есть топологическая группа, которая является гладким многообразием, причем групповые операции задаются морфизмами многообразий (такая группа называется **группой Ли**. Докажите, что расслоение TG тривиально.

6.3. Проективные модули

Определение 6.7. Пусть V - модуль над кольцом R, а $V' \subset V$ его подмодуль. Предположим, что у V найдется подмодуль V'', не пересекающий V', причем V вместе с V' порождают V. В таком случае V' и V'' называются **прямыми слагаемыми** V, а V – **прямой суммой** V' и V'', обозначается как $V = V' \oplus V''$.

Задача 6.23. Рассмотрим подмодуль $n\mathbb{Z} \subset Z$. Будет ли он прямым слагаемым $\mathbb{Z}$?

Задача 6.24. Пусть R – кольцо без делителей нуля, а $V = R$ - одномерный свободный модуль. Найдите все прямые слагаемые в V.

Задача 6.25 (*). Рассмотрим кольцо усеченных полиномов $\mathbb{R}[t]/t^k$, и пусть $V = R$ - одномерный свободный модуль. Найдите все прямые слагаемые в V.

Определение 6.8. Модуль над кольцом R называется **свободным**, если он изоморфен прямой сумме R с собой (возможно, бесконечное число раз). Модуль называется **проективным**, если он изоморфен прямому слагаемому свободного.

Задача 6.26. Докажите, что каждый модуль является фактор-модулем свободного.

Задача 6.27. Пусть V – R-модуль, а $A \xrightarrow{\pi} B$ – сюрьективный морфизм R-модулей. Докажите, что каждый морфизм R-модулей $V \xrightarrow{\phi} B$ поднимается до морфизма $V \xrightarrow{\psi} A$, делая следующую диаграмму коммутативной.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & A \arrow[d, "\pi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

а. в предположении, что V свободный

б. [!] в предположении, что V проективный.

Задача 6.28 (!). Пусть V – такой модуль, для которого верно утверждение предыдущей задачи. Докажите, что V проективный.

Указание. Возьмем в качестве A свободный модуль, сюрьективно отображающийся на V, в качестве B возьмем V, а в качестве π тождественное отображение.

Определение 6.9. Пусть $0 \longrightarrow A \hookrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ – точная последовательность R-модулей. Если для какого-то $C' \subset B$, имеет место изоморфизм $B = A \oplus C'$, то говорят, что точная последовательность $0 \longrightarrow A \hookrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ **расщепляется**.

Задача 6.29 (!). Пусть C – R-модуль. Докажите, что следующие условия равносильны.

(i) Любая точная последовательность вида $0 \longrightarrow A \hookrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ расщепляется.

(ii) Модуль C проективный.

Задача 6.30 (*). Пусть V - конечнопорожденный проективный модуль над кольцом R. Докажите, что он свободен, если

а. [*] $R = \mathbb{Z}$.

б. [*] R – кольцо полиномов $\mathbb{C}[t]$.

в. [*] R – локальное кольцо.

Задача 6.31. Пусть $\mathcal{B}$ – расслоение над M, а $\mathcal{B}(M)$ его пространство сечений. Докажите, что $\mathcal{B}(M)$ – проективный $C^\infty M$-модуль

Указание. Воспользуйтесь задачей 6.15.

6.4. Лемма Накаямы

Определение 6.10. Пусть $I \subset R$ – идеал. R-модуль вида R/I называется **циклическим**.

Задача 6.32. Пусть V – циклический R-модуль вида R/I, а $I_1 \supset I$ - идеал в R. Докажите, что $V/I_1V = R/I_1R$.

Задача 6.33. Пусть V – циклический модуль над локальным кольцом A, а $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал. Предположим, что $V = \mathfrak{m}V$. Докажите, что $V = 0$.

Указание. Докажите, что $I \subset m$, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 6.34 (!). (лемма Накаямы) Пусть V – конечно-порожденный модуль над локальным кольцом A. Предположим, что $V = \mathfrak{m}V$. Докажите, что $V = 0$.

Указание. Воспользуйтесь индукцией, и примените предыдущую задачу.

Задача 6.35 (**). (лемма Накаямы в большей общности). Пусть V - конечно-порожденный модуль над R, а $I \in R$ - идеал, такой, что $IV = V$. Докажите, что найдется $r \in R$, сравнимый с единицей по модулю I, и такой, что $rV = 0$.

6.5. Категории и функторы

Определение 6.11. **Категорией** $\mathcal{C}$ называется набор данных ("объектов категории", "морфизмов между объектами", "композиций морфизмов", "тождественный морфизм"), удовлетворяющих аксиомам, приведенным ниже.

Объекты: Множество $\mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ объектов $\mathcal{C}$ (иногда рассматривают не множество, а *класс* $\mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$, который может и не быть множеством, например, класс всех множеств, или класс всех линейных пространств).

Морфизмы: Для любых $X, Y \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$, задано множество $\mathcal{M}\mathrm{or}(X, Y)$ **морфизмов** из X в Y.

Композиция морфизмов: Если $\phi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(X, Y), \psi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(Y, Z)$, задан морфизм $\phi \circ \psi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(X, Z)$, который называется **композицией морфизмов**.

Тождественный морфизм: Для каждого $A \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C})$ задан морфизм $\mathsf{Id}_A \in \mathcal{M}\mathrm{or}(A, A)$.

Эти данные удовлетворяют следующим аксиомам.

Ассоциативность композиции: $\phi_1 \circ (\phi_2 \circ \phi_3) = (\phi_1 \circ \phi_2) \circ \phi_3$.

Свойства тождественного морфизма: Для любого морфизма $\phi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(X, Y)$, $\mathsf{Id}_X \circ \phi = \phi = \phi \circ \mathsf{Id}_Y$.

Задача 6.36. Докажите, что следующие данные задают категорию.

а. Объекты – группы, морфизмы – гомоморфизмы.

б. Объекты – векторные пространства, морфизмы – гомоморфизмы.

в. Объекты – векторные пространства, морфизмы – сюрьективные гомоморфизмы.

г. Объекты – топологические пространства, морфизмы – непрерывные отображения

д. Объекты – гладкие многообразия, морфизмы - морфизмы многообразий.

е. Объекты – векторные расслоения над M, морфизмы – морфизмы расслоений.

Задача 6.37. Докажите, что следующие данные не задают категорию.

а. Объекты – многообразия, морфизмы - неособые отображения.

б. Объекты – векторные пространства, морфизмы – гомоморфизмы с ненулевым ядром

в. Объекты – конечномерные векторные пространства, морфизмы – гомоморфизмы из A в B ранга $\min(\dim A, \dim B)$ (максимально возможного).

Определение 6.12. Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ — категории. **Ковариантным функтором** из $\mathcal{C}_1$ в $\mathcal{C}_2$ называется следующий набор данных.

(i) Отображение $F: \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C}_1) \longrightarrow \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C}_2)$, ставящее в соответствие объектам $\mathcal{C}_1$ объекты $\mathcal{C}_2$.

(ii) Отображение морфизмов $F: \mathcal{M}\mathrm{or}(X, Y) \longrightarrow \mathcal{M}\mathrm{or}(F(X), F(Y))$, определенное для любой пары объектов $X, Y \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C}_1)$.

Эти даные *определяют функтор из* $\mathcal{C}_1$ *в* $\mathcal{C}_2$, если $F(\phi) \circ F(\psi) = F(\phi \circ \psi)$, и $F(\mathsf{Id}_X) = \mathsf{Id}_{F(X)}$.

Задача 6.38. Пусть $\mathcal{C}$ – категория пучков модулей над окольцованным пространством $(M, \mathcal{F})$. Докажите, что соответствие $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}(M)$ задает функтор из $\mathcal{C}$ в категорию $\mathcal{F}(M)$-модулей.

Определение 6.13. Два функтора $F, G: \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ называются **эквивалентными**, если для каждого $X \in \mathcal{O}\mathrm{b}(\mathcal{C}_1)$ задан изоморфизм $\Psi_X: F(X) \longrightarrow G(X)$, для любого морфизма $\phi \in \mathcal{M}\mathrm{or}(X, Y)$,

$$F(\phi) \circ \Psi_Y = \Psi_X \circ G(\phi). \tag{6.1}$$

Определение 6.14. Функтор $F: \mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_2$ называется **эквивалентностью категорий**, если найдутся функторы $G, G': \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_1$ такие, что $F \circ G$ эквивалентен тождественному функтору на $\mathcal{C}_1$, а $G' \circ F$ эквивалентен тождественному функтору на $\mathcal{C}_2$.

Задача 6.39 (*). Докажите, что следующие категории не эквивалентны.

а. [*] Категория векторных пространств и категория групп

б. [*] Категория топологических пространств и категория векторных пространств

в. [*] Категория групп и категория топологических пространств

Задача 6.40. Докажите, что категория локально тривиальных гладких расслоений над M со структурой относительного векторного пространства эквивалентна категории локально тривиальных конечномерных пучков модулей над $C^\infty M$.

Задача 6.41 (*). Пусть M - компактное многообразие. Докажите, что категория пучков $C^\infty M$-модулей эквивалентна категории модулей над $C^\infty M$.

6.6. Теорема Серра-Суона

Определение 6.15. Пусть $x \in M$ – точка многообразия. **Росток** $C^\infty M$-модуля V есть тензорное произведение $C^\infty_x M \otimes_{C^\infty M} V$, где $C^\infty_x M$ – кольцо ростков $C^\infty M$ в x. Мы рассматриваем росток V_x как $C^\infty_x M$-модуль.

Задача 6.42. Пусть V - свободный $C^\infty M$-модуль. Докажите, что росток V в x есть росток соответствующего пучка $C^\infty M$-модулей над M.

Задача 6.43. Пусть A - свободный $C^\infty M$-модуль, разложенный в прямую сумму двух проективных: $A = B \oplus C$, $\mathcal{A}$ соответствующий A тривиальный пучок $C^\infty M$-модулей, а $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ подпучок, составленный из сечений $\mathcal{V}(U)$, все ростки которых лежат в B_x. Определим $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ аналогичным образом.

а. Докажите, что $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ – пучки $C^\infty M$-модулей.

б. Докажите, что $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$.

в. Докажите, что росток B_x $C^\infty M$-модуля B в $x \in M$ изоморфен ростку $\mathcal{B}_x$ соответствующего пучка модулей.

Задача 6.44 (!). Пусть V – проективный модуль над $C^\infty M$, а $\mathsf{rk}_x V := \dim V/\mathfrak{m}_x V$ – размерность слоя V в x.[1]. Предположим, что $\dim_x V = i$. Докажите, что росток V_x в x порожден над $C^\infty M$ ровно i элементами V_x.

Указание. Воспользуйтесь леммой Накаямы.

Задача 6.45 (!). Пусть V – проективный модуль над $C^\infty M$, а $Z_i \subset M$ - множество всех $x \in M$, где $\mathsf{rk}_x V \leqslant i$. Докажите, что Z_i открыто.

Указание. Воспользуйтесь задачей 6.44.

Задача 6.46 (!). Докажите, что ранг проективного модуля на связном многообразии постоянный.

Указание. Проверьте, что $\mathsf{rk}_x(V_1 \oplus V_2) = \mathsf{rk}\, V_1 \oplus \mathsf{rk}\, V_2$, и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Определение 6.16. Пусть B – тривиальное расслоение над M, а $v_1, ..., v_n$ – его сечения. Они называются **линейно независимыми над** $C^\infty M$, если в каждой точке $x \in M$, вектора слоев $v_1\big|_x, v_2\big|_x, v_3\big|_x, ...$ линейно независимы.

[1] Это число называется **рангом** V в x.

Задача 6.47. Пусть B – тривиальное n-мерное расслоение, а $v_1, ..., v_n$ – его сечения, которые порождают B над $U \subset M$. Докажите, что они линейно независимы везде на U.

Задача 6.48 (!). Пусть A - свободный $C^\infty M$-модуль, разложенный в прямую сумму двух проективных: $A = B \oplus C$, а $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ – соответствующие пучки. Докажите, что в окрестности каждой точки $x \in M$, $\mathcal{B}$ порождено $\operatorname{rk}_x B$ линейно независимыми над $C^\infty M$ сечениями.

Указание. Воспользуйтесь задачей 6.44, чтобы доказать, что $\mathcal{B}$ порождено $\operatorname{rk}_x B$ сечениями. Чтобы убедиться в независимости этих сечений над $C^\infty M$, примените тот же аргумент к $\mathcal{C}$, и получите $\operatorname{rk}_x A$ сечений, которые порождают $\mathcal{A}$.

Задача 6.49. Пусть B – пучок модулей над $C^\infty M$, в окрестности каждой точки порожденный n линейно независимыми над $C^\infty M$ сечениями. Докажите, что B локально тривиальный.

Задача 6.50 (!). Пусть B – проективный модуль над $C^\infty M$, а $\mathcal{B}$ – пучок модулей, постоенный как в задаче 6.43. Докажите, что этот пучок локально тривиальный.

Задача 6.51. Пусть $\mathcal{C}_p$ – категория, объекты которой суть проективные модули над $C^\infty M$, а морфизмы – такие гомоморфизмы $C^\infty M$-модулей, что все ядра и коядра проективны. Проверьте выполнение аксиом категории.

Задача 6.52 (*). (Теорема Серра-Суона). Пусть $\mathcal{C}_b$ – категория векторных расслоений над M.

а. [*] Рассмотрим соответствие Ψ, которое делает из проективного $C^\infty M$-модуля векторное расслоение, как в задаче 6.43. Докажите, что $\Psi(B)$ не зависит от выбора свободного модуля $A \supset B$.

б. [*] Докажите, что Ψ задает функтор из $\mathcal{C}_p$ в $\mathcal{C}_b$.

в. [*] Докажите, что этот функтор определяет эквивалентность категорий $\mathcal{C}_b$ и $\mathcal{C}_p$.