Для зачета по каждому листку надо сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Анализ 5: Векторные расслоения

5.1. Локально тривиальные гладкие расслоения

Определение 5.1. Пусть $M \xrightarrow{\phi} N$ – морфизм многообразий. Он называется **неособым**, если его дифференциал $d\phi$ имеет максимальный ранг в каждой точке M.

Задача 5.1. Пусть $M \xrightarrow{\phi} N$ – неособый морфизм, $\dim M > \dim N$, а $X \subset N$ – гладкое подмногообразие. Докажите, что $\phi^{-1}(X)$ – гладкое подмногообразие в M.

Определение 5.2. Тривиальное гладкое расслоение есть проекция $N \times U \longrightarrow U$.

Определение 5.3. Сюрьективный морфизм многообразий $M \xrightarrow{\phi} N$ называется **локально тривиальным гладким расслоением**, если у каждой точки N найдется такая окрестность U, что проекция $\phi^{-1}(U) \longrightarrow U$ является тривиальным гладким расслоением

Задача 5.2. Докажите, что это неособый морфизм.

Задача 5.3. Рассмотрим трехмерную сферу $S^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$, и пусть $\pi: \ S^3 \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ есть проекция, индуцированная тавтологическим отображением $\mathbb{C}^2 \backslash 0 \longrightarrow \mathbb{C}P^1$. Докажите, что это локально тривиальное гладкое расслоение со слоем S^1.

Замечание. Это отображение называется **расслоением Хопфа**.

Задача 5.4. Пусть $\pi: \ S^3 \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ - расслоение Хопфа, а $\mathbb{C} = \mathbb{C}P^1 \backslash \{0\} \hookrightarrow \mathbb{C}P^1$ – стандартное вложение. Докажите, что $\pi^{-1}(\mathbb{C}P^1 \backslash \{0\})$ гомеоморфно $S^1 \times \mathbb{R}^2$.

Задача 5.5 (!). Докажите, что расслоение Хопфа не является тривиальным гладким расслоением.

Задача 5.6 (*). Докажите, что неособый сюрьективный морфизм компактных многообразий является локально тривиальным гладким расслоением.

Задача 5.7. Постройте неособый сюрьективный морфизм из нечетномерной сферы S^{2n+1} в $\mathbb{C}P^n$. Докажите, что это локально тривиальное, но нетривиальное расслоение.

Указание. Обобщите конструкцию расслоения Хопфа.

Задача 5.8 (*). Постройте локально тривиальное гладкое расслоение вида $S^7 \longrightarrow S^4$. Докажите, что оно нетривиально.

Определение 5.4. Пусть $M_1 \xrightarrow{\pi_1} N$ и $M_2 \xrightarrow{\pi_2} N$ – непрерывные отображения топологических пространств, а $\Delta \subset N \times N$ – диагональ. Обозначим за $\pi_1 \times \pi_2 : \ M_1 \times M_2 \longrightarrow N \times N$ естественную проекцию, и пусть $M_1 \times_N M_2 := (\pi_1 \times \pi_2)^{-1}(\Delta)$. Пространство $M_1 \times_N M_2$ называется **расслоенным произведением** M_1 и M_2 над N.

Задача 5.9 (!). Пусть $M_1 \xrightarrow{\pi_1} N$ и $N_2 \xrightarrow{\pi_2} N$ – локально тривиальные гладкие расслоения, со слоем F_1 и F_2. Докажите, что естественное отображение $M_1 \times_N M_2 \longrightarrow N$ является локально тривиальным расслоением со слоем $F_1 \times F_2$.

Задача 5.10. Докажите, что расслоенное произведение тривиальных гладких расслоений тривиально.

Задача 5.11. Представьте ленту Мебиуса как гладкое расслоение над $M \xrightarrow{\pi} S^1$ со слоем $]0,1[$. Докажите, что $M \times_{S^1} M$ гомеоморфно $M \times]0,1[$.

Задача 5.12 (*). Пусть $\pi : \ S^3 \longrightarrow \mathbb{C}P^1$ – расслоение Хопфа. Докажите, что $S^3 \times_{\mathbb{C}P^1} S^3$ гомеоморфно $S^3 \times S^1$.

5.2. Расслоенные произведения и группы

Определение 5.5. Топологической группой (также **непрерывной группой**) называется топологическое пространство, снабженное групповыми операциями (умножением и взятием обратного элемента), которые удовлетворяют аксиомам группы, и непрерывны.

Задача 5.13. Пусть G - матричная группа, с естественной топологией. Докажите, что это топологическая группа.

Задача 5.14. Постройте структуру непрерывной группы на S^3.

Задача 5.15 (*). Может ли четномерная сфера быть топологической группой?

Задача 5.16 (*). Может ли букет двух окружностей быть топологической группой?

Определение 5.6. Пусть $M \xrightarrow{f} N$, $M' \xrightarrow{f'} N$ – непрерывные отображения (морфизмы) топологических пространств. Морфизм $M \xrightarrow{\psi} M'$ называется **морфизмом над** N, если следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "f"'] & M' \arrow[d, "f'"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Задача 5.17. Пусть $B \xrightarrow{\pi} M$ – непрерывное отображение, а $B \xrightarrow{\Delta} B \times_M B$ переводит $b \in B$ в $(b,b) \in B \times_M B$. Докажите, что это морфизм над B.

Определение 5.7. Пусть $B \xrightarrow{\pi} M$ – непрерывное отображение, а $B \times_M B \xrightarrow{\Psi} M$ - морфизм над M. Этот морфизм называется **ассоциативным умножением**, если на слоях π он ассоциативен, то есть удовлетворяет $\Psi(a, \Psi(b, c)) = \Psi(\Psi(a, b), c)$. Сечение $M \xrightarrow{e} B$ называется **единицей**, если композиция

$$B \xrightarrow{\mathsf{Id}_B \times e} B \times_M B \xrightarrow{\Psi} B$$

и

$$B \xrightarrow{e \times \mathsf{Id}_B} B \times_M B \xrightarrow{\Psi} B$$

равна Id_B. Морфизм $\nu : B \longrightarrow B$ над M, такой, что композиция

$$B \xrightarrow{\Delta} B \times_M B \xrightarrow{\mathsf{Id}_B \times \nu} B \times_M B \xrightarrow{\Psi} B$$

и

$$B \xrightarrow{\Delta} B \times_M B \xrightarrow{\nu \times \mathsf{Id}_B} B \times_M B \xrightarrow{\Psi} B$$

переводит b в $e(\pi(b))$, называется **обратным элементом**. Если на $B \xrightarrow{\pi} M$ задано ассоциативное умножение, единица и обратный элемент, B называется **топологической группой над** M.

Задача 5.18. Пусть $B \xrightarrow{\pi} M$ – топологическая группа над M. Докажите, что все слои π суть топологические группы.

Задача 5.19 (!). Пусть $G \times M \longrightarrow M$ тривиальное расслоение, причем на G задан набор непрерывных групповых операций, непрерывно зависящий от параметра $m \in M$. Докажите, что это определяет на $G \times M$ структуру топологической группы над M.

Задача 5.20. Пусть B – топологическая группа над M. Рассмотрим пространство непрерывных сечений $M \longrightarrow B$. Докажите, что это группа.

Задача 5.21 (*). В условиях предыдущей задачи, рассмотрим открыто-компактную топологию на пространстве непрерывных сечений $M \longrightarrow B$. Докажите, что пространство сечений будет топологической группой.

5.3. Векторные расслоения и расслоенные пространства

Задача 5.22. Пусть задана абелева группа G. Пусть к тому же для каждого ненулевого элемента λ поля k задан автоморфизм $\phi_\lambda : G \longrightarrow G$, причем $\phi_\lambda \circ \phi_{\lambda'} = \phi_{\lambda\lambda'}$, и $\phi_{\lambda+\lambda'}(g) = \phi_\lambda(g) + \phi_{\lambda'}(g)$. Докажите, что G является линейным пространством. Докажите, что все линейные пространства можно задать таким образом.

Определение 5.8. Пусть $k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Абелева топологическая группа $B \xrightarrow{\pi} M$ над M называется **относительным векторным пространством над** M, если для каждого ненулевого $\lambda \in k$ задан автоморфизм $\phi_\lambda : B \longrightarrow B$ группы B над M, который задает структуру векторного пространства на слоях π.

Задача 5.23 (!). Пусть $B \xrightarrow{\pi} M$ – относительное векторное пространство над M, $U \subset M$ - открытое подмножество, а $\mathcal{B}(U)$ - множество всех сечений отображения $\pi^{-1}(U) \xrightarrow{\pi} U$.

а. [!] Докажите, что $\mathcal{B}(U)$ это векторное пространство.

б. [!] Докажите, что $\mathcal{B}(U)$ задает пучок модулей над пучком $C^0(M)$ непрерывных функций.

Задача 5.24 (*). Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ какое-то подмножество (не обязательно подмногообразие), $s \in S$ - точка, а $v \in T_s\mathbb{R}^n$ – какой-то вектор, проведенный через s. Говорится, что s принадлежит **касательному конусу** C_sS множества S в s, если расстояние от S до точки прямой, проведенной через s в направлении v, стремится к нулю при приближении точки к s быстрее, чем линейно:

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{d(S, s+tv)}{t} \longrightarrow 0.$$

а. [*] Докажите, что множество CS пар $(s, v), s \in S, v \in C_sS$ является относительным векторным пространством над S.[1]

б. [*] Вычислите CS для $S \subset \mathbb{R}^3$, заданного как множество нулей полинома $x^2 + y^2 - z^2$.

в. [*] Докажите, что в этой ситуации $CS \longrightarrow S$ не является локально тривиальным гладким расслоением.

Определение 5.9. Пусть $B \longrightarrow M$ – гладкое локально тривиальное расслоение, со слоем $\mathbb{R}^n$. Предположим, что на B задана структура относительного векторного пространства над M, причем все отображения, использованные в определении относительного векторного пространства, являются морфизмами гладких многообразий. Тогда B называется **тотальным пространством векторного расслоения.**

Задача 5.25. Докажите, что соответствующий $B \longrightarrow M$ пучок сечений является локально тривиальным пучком $C^\infty M$-модулей.

Замечание. Напомним, что **векторным расслоением** называется локально тривиальный пучок модулей над $C^\infty M$.

Определение 5.10. Пусть $\mathcal{B}$ – n-мерное векторное расслоение над M, $x \in M$ точка, $\mathcal{B}_x$ - пространство ростков B в x, а $\mathfrak{m}_x \subset C^\infty_x M$ максимальный идеал в кольце ростков $C^\infty_x M$. Определим **слой** $\mathcal{B}$ **в** x как фактор $\mathcal{B}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{B}_x$. Слой векторного расслоения обозначается $\mathcal{B}\Big|_x$

Задача 5.26. Докажите, что слой n-мерного расслоения есть n-мерное векторное пространство.

Задача 5.27. Пусть $\mathcal{B} = C^\infty M^n$ – тривиальное n-мерное векторное расслоение, а $b \in \mathcal{B}\Big|_x$ точка слоя, представленная ростком $\phi \in \mathcal{B}_x = C^\infty_m M^n$, $\phi = (f_1, ..., f_n)$. Рассмотрим отображение множества всех слоев $\mathcal{B}$ в $M \times \mathbb{R}^n$, переводящее $(x, \phi = (f_1, ..., f_n))$ в $(f_1(x), ..., f_n(x))$. Докажите, что это отображение биективно.

Определение 5.11. Пусть $\mathcal{B}$ – n-мерное векторное расслоение над M, а $\operatorname{Tot}\mathcal{B}$ множество векторов в слоях $\mathcal{B}$ над всеми точками M. Пусть $U \subset M$ открытое подмножество M, на котором $\mathcal{B}$ тривиально. Пользуясь локальной биекцией $\operatorname{Tot}\mathcal{B}(U) = U \times \mathbb{R}^n$, определенной в предыдущей

[1] Множество CS называется **касательным конусом к** S.

задаче, рассмотрим топологию на $\operatorname{Tot}\mathcal{B}$, с базой, которая индуцирована открытыми подмножествами в $\operatorname{Tot}\mathcal{B}(U) = U \times \mathbb{R}^n$ для всех открытых множеств $U \subset M$ и всех тривиализаций $\mathcal{B}$.

Задача 5.28. Докажите, что такая топология превращает $\operatorname{Tot}\mathcal{B}$ в локально тривиальное расслоение над M, со слоем $\mathbb{R}^n$

Задача 5.29 (!). Докажите, что $\operatorname{Tot}\mathcal{B}$ снабжено естественной структурой относительного векторного пространства над M, причем пучок его сечений изоморфен $\mathcal{B}$

Определение 5.12. Пусть $\mathcal{B}$ – векторное расслоение над M, то есть локально-тривиальный пучок $C^\infty M$-модулей, полученный как пучок сечений для тотального пространства векторного расслоения $B \longrightarrow M$. Тогда $B = \operatorname{Tot}\mathcal{B}$ называется **тотальным пространством векторного расслоения** $\mathcal{B}$.

Замечание. На практике, "тотальное пространство векторного расслоения" обыкновенно обозначается той же буквой, что и соответствующий пучок, и математики часто не разделяют эти понятия.

Задача 5.30. Пусть $M_1 \xrightarrow{\phi} M$ – морфизм гладких многообразий, а $B \xrightarrow{\pi} M$ – тотальное пространство векторного расслоения. Докажите, что $B \times_M M_1$ есть тотальное пространство векторного расслоения над M_1.

Определение 5.13. Это расслоение обозначается $\phi^* B$, и называется **обратным образом** или **пулл-бэком** расслоения B (от английского "pull-back").

Задача 5.31. Докажите, что слой $\phi^*(B)\Big|_x$ естественно отождествляется с $B\Big|_{\phi(x)}$.

Задача 5.32. Докажите, что обратный образ тривиального расслоения тривиален.

Задача 5.33 (*). Пусть $M_1 \xrightarrow{\phi} M$ – неособый, сюрьективный морфизм компактных многообразий, а B – нетривиальное расслоение над M. Может ли расслоение $\phi^*(B)$ быть тривиально?

5.4. Тензорное произведение

Определение 5.14. Пусть V, V' – модули над кольцом R, W – свободная абелева группа, порожденная символами вида $v \otimes v'$, где $v \in V, v' \in V'$, а $W_1 \subset W$ - подгруппа, порожденная выражениями вида $rv \otimes v' - v \otimes rv'$, $(v_1 + v_2) \otimes v' - v_1 \otimes v' - v_2 \otimes v'$ и $v \otimes (v_1' + v_2') - v \otimes v_1' - v \otimes v_2'$. Определим **тензорное произведение** $V \otimes_R V'$ как факторгруппу W/W_1.

Задача 5.34. Докажите, что $r \cdot v \otimes v' \mapsto (rv) \otimes v'$ определяет на $V \otimes_R V'$ структуру R-модуля.

Задача 5.35. Докажите, что $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0$.

Задача 5.36 (*). Найдите ненулевой модуль V над кольцом R такой, что $V \otimes_{\mathbb{R}} V = 0$.

Задача 5.37. Пусть I_1, I_2 - идеалы в R. Докажите, что $(R/I_1) \otimes_{\mathbb{R}} (R/I_2) = R/(I_1 + I_2)$, где $I_1 + I_2$ - идеал, порожденный линейными комбинациями элементов из I_1, I_2.

Задача 5.38. Докажите, что тензорное произведение свободных модулей свободно.

Задача 5.39 (!). Пусть $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ - пучки локально-тривиальных модулей на окольцованном пространстве $(M, \mathcal{F})$. Докажите, что

$$U \longrightarrow \mathcal{B}_1(U) \otimes_{\mathcal{F}(U)} \mathcal{B}_2(U)$$

тоже пучок модулей.

Задача 5.40 (*). Верно ли утверждение предыдущей задачи без условия локальной тривиальности?

Определение 5.15. **Тензорным произведением** расслоений называется тензорное произведение соответствующих пучков модулей.

Замечание. Аналогичным образом определяется внешнее и симметрическое произведение расслоения с самим собой.

Задача 5.41. Пусть $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ – пучки локально-тривиальных $C^\infty M$-модулей, а $\mathcal{B}_1 \otimes_{C^\infty M} \mathcal{B}_2$ их тензорное произведение. Докажите, что слой $\mathcal{B}_1 \otimes_{C^\infty M} \mathcal{B}_2$ в x естественным образом отождествляется с тензорным произведением слоев $\mathcal{B}_1\Big|_x \otimes \mathcal{B}_2\Big|_x$.

Задача 5.42. Пусть V - модуль над кольцом R, а $\operatorname{Hom}_R(V, R)$ группа гомоморфизмов R-модулей из V в R. Докажите, что действие $r \cdot h(\dots) \mapsto rh(\dots)$ задает на $\operatorname{Hom}_R(V, R)$ структуру R-модуля. Докажите, что $\operatorname{Hom}_R(R^n, R)$ с таким образом определенной структурой R-модуля изоморфен (неканонически) свободному модулю R^n.

Определение 5.16. Пусть V - модуль над кольцом R. **Двойственный** R**-модуль** V^* определяется как $\operatorname{Hom}_R(V, R)$, с вышеописанной структурой модуля.

Задача 5.43. Рассмотрим $\mathbb{Q}/Z$ как Z-модуль. Докажите, что $(\mathbb{Q}/Z)^* = 0$.

Задача 5.44. Докажите, что модуль $\mathbb{Q}^* = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(Q, \mathbb{Z})$ нулевой.

Задача 5.45 (*). Пусть R – кольцо ростков гладких функций в нуле на $\mathbb{R}$, а K – идеал функций, все производные которых в нуле равны нулю. Докажите, что $(R/K)^* := \operatorname{Hom}_R(R/K, R)$ нулевой, или опровергните это.

Задача 5.46 (**). То же самое, если R - кольцо ростков гладких функций в нуле на $\mathbb{R}^n$.

Задача 5.47 (!). Пусть $\mathcal{B}$ – векторное расслоение, то есть локально тривиальный пучок $C^\infty M$-модулей, а $\operatorname{Tot} \mathcal{B} \xrightarrow{\pi} M$ - его тотальное пространство. Определим $\mathcal{B}^*(U)$ как пространство гладких функций на $\pi^{-1}(U)$, линейных по слоям π, с естественным отображением ограничения $\mathcal{B}^*(U) \longrightarrow \mathcal{B}^*(V)$.

а. [!] Докажите, что $U \longrightarrow \mathcal{B}^*(U)$ задает пучок модулей над $C^\infty M$.

б. [!] Докажите, что этот пучок локально тривиальный.

в. [!] Докажите, что $\mathcal{B}^*(U)$ есть двойственный модуль к $\mathcal{B}(U)$ над $C^\infty U$.

Определение 5.17. Пусть $\mathcal{B}$ – векторное расслоение, $\mathcal{B}^*$ – локально тривиальный пучок $C^\infty M$-модулей, определенный выше. Он называется **двойственным расслоением** к $\mathcal{B}$.

Задача 5.48. Докажите, что слой $\mathcal{B}^*\Big|_x$ есть векторное пространство, двойственное к $\mathcal{B}\Big|_x$.

Задача 5.49. Пусть $\mathcal{B}$ – нетривиальное векторное расслоение. Докажите, что $\mathcal{B}^*$ тоже нетривиально.

Задача 5.50. Пусть $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ - векторные расслоения над M, а $\operatorname{Tot}\mathcal{B}_1 \times_M \operatorname{Tot}\mathcal{B}_2 \xrightarrow{\pi} M$. расслоенное произведение их тотальных пространств. Докажите, что $\pi^{-1}(x) = \mathcal{B}_1\Big|_x \times \mathcal{B}_2\Big|_x$. Докажите, что сечения $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ суть то же самое, что функции на $\operatorname{Tot}\mathcal{B}_1 \times_M \operatorname{Tot}\mathcal{B}_2$, билинейные на слоях π.

Определение 5.18. Билинейной формой на расслоении $\mathcal{B}$ называется сечение $(\mathcal{B}\otimes\mathcal{B})^*$. Симметричная билинейная форма на $\mathcal{B}$ называется **положительно определенной**, если она дает положительно определенную форму на всех слоях $\mathcal{B}$. Симметричную положительно определенную билинейную форму также называют **метрикой**. Кососимметричная билинейная форма на $\mathcal{B}$ называется **невырожденной**, если она невырождена на всех слоях $\mathcal{B}$.

Задача 5.51 (!). Пусть $\mathcal{B}$ – расслоение над многообразием M со счетной базой. Докажите, что на $\mathcal{B}$ существует метрика.

Указание. Постройте метрику локально, и воспользуйтесь разбиением единицы.

Задача 5.52. Найдите 2-мерное расслоение которое не допускает невырожденной кососимметричной билинейной формы.

Задача 5.53 (*). Для любого $n > 0$, найдите $2n$-мерное расслоение, которое не допускает невырожденной кососимметричной билинейной формы.

Задача 5.54 (*). Найдите нетривиальное 3-мерное расслоение $\mathcal{B}$ такое, что внешний квадрат $\Lambda^2\mathcal{B}$ тривиален.

Задача 5.55 (*). Найдите 2-мерное расслоение, которое не допускает невырожденной билинейной симметричной формы с сигнатурой $(1, 1)$.