Для зачета по каждому листку надо сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Анализ 2: Размерность Хаусдорфа и теорема Уитни.

2.1. Размерность Хаусдорфа

Определение 2.1. Пусть M – метрическое пространство. **Диаметр** $\operatorname{diam}(M) \in [0, \infty]$ есть число $\sup_{x,y \in M} d(x, y)$

Определение 2.2. Шаром с центром в x радиуса ε в метрическом пространстве называется множество $B_\varepsilon(x)$ всех точек y с $d(x, y) < \varepsilon$.

Задача 2.1. Чему может быть равен диаметр шара радиуса ε в метрическом пространстве?

Задача 2.2. Пусть M – метрическое пространство, $\varepsilon > 0$. Докажите, что у M есть покрытие, состоящее из шаров диаметра $\leqslant \varepsilon$.

Определение 2.3. Пусть $\{S_i\}$ – покрытие пространства M, состоящее из шаров радиуса r с $r < \varepsilon$. Определим $\mu_{d,\varepsilon} \in [0, \infty]$ как

$$\mu_{d,\varepsilon} := \inf_{\{S_i\}} \sum_i (\operatorname{diam} S_i)^d$$

где инфимум берется по всем таким покрытиям. Предел

$$\mu_d(M) := \sup \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \mu_{d,\varepsilon}(M)$$

называется d**-мерной мерой Хаусдорфа** пространства M.

Задача 2.3. Пусть метрика в $M = \mathbb{R}^n$ определена нормой $|(x_1, ..., x_n)| = \max |x_i|$. Докажите, что n-мерная мера Хаусдорфа полиэдра равна его объему (в обычном смысле).

Задача 2.4 (*). Пусть метрика в $M = \mathbb{R}^n$ определена нормой $|(x_1, ..., x_n)| = \sum |x_i|$. Докажите, что n-мерная мера Хаусдорфа полиэдра пропорциональна его объему. Вычислите коэффициент пропорциональности.

Задача 2.5 (*). Пусть в $M = \mathbb{R}^n$ задана евклидова метрика. Докажите, что n-мерная мера Хаусдорфа полиэдра пропорциональна его объему. Вычислите коэффициент пропорциональности.

Определение 2.4. Отображение $f: M \longrightarrow N$ метрических пространств называется **липшицевым**, с константой C, если $d(x, y) \geqslant Cd(f(x), f(y))$, для заданного числа $C > 0$. Отображение называется **билипшицевым**, если оно биективно, и обратное отображение тоже липшицево (с какой-то константой).

Задача 2.6. Докажите, что любое липшицево отображение непрерывно.

Задача 2.7 (*). Приведите пример непрерывного отображения компактных метрических пространств, которое не липшицево.

Задача 2.8. Пусть d_1, d_1 – нормы на векторном пространстве V. Обозначим той же буквой соответствующие метрики. Докажите, что тождественное отображение $\mathsf{Id}_M: (V, d_1) \longrightarrow (V, d_2)$ является липшицевым тогда и только тогда, когда единичный шар с центром в 0 ограничен в норме, заданной d_2.

Задача 2.9 (*). Пусть $M = \mathbb{R}^n$, d_1 и d_2 какие-то нормы на M. Докажите, что тождественное отображение $\mathsf{Id}_M: (M, d_1) \longrightarrow (M, d_2)$ билипшицево.

Задача 2.10 (!). Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое, ограниченное подмножество, а $\Phi: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ гладкое отображение, гладко продолжающееся на границу ∂U. Докажите, что Φ липшицево.

Задача 2.11. Пусть $M \xrightarrow{f} N$ липшицево отображение метрических пространств, с константой C. Докажите, что $\mu_d(M) \geqslant C^d \mu_d(f(M))$, где μ_d есть d-мерная мера Хаусдорфа.

Задача 2.12 (!). Пусть $\mu_d(M) < \infty$. Докажите, что $\mu_{d'}(M) = 0$ для любого $d' > d$.

Указание. Из $\mathsf{diam}\, S_i < \varepsilon$ выведите неравенство

$$\mu_{d',\varepsilon} = \inf_{\{S_i\}} \sum_i (\mathsf{diam}\, S_i)^{d'} \leqslant \varepsilon^{d'-d} \inf_{\{S_i\}} \sum_i (\mathsf{diam}\, S_i)^d = \varepsilon^{d'-d} \mu_{d,\varepsilon} \tag{2.1}$$

и перейдите к пределу при $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Задача 2.13 (!). Пусть $\mu_{d'}(M) = \infty$. Докажите, что $\mu_d(M) = \infty$ для любого $d < d'$.

Указание. Воспользуйтесь неравенством (2.1), и перейдите к пределу при $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Определение 2.5. Пусть M – метрическое пространство. **Размерность Хаусдорфа** $\dim_H M \in [0, \infty]$ есть супремум всех d таких, что $\mu_d(M) = \infty$.

Задача 2.14. Найдите размерность Хаусдорфа конечного множества.

Задача 2.15. Пусть $f: M \longrightarrow N$ – липшицево отображение. Докажите, что f не увеличивает размерность Хаусдорфа: $\dim_H(M) \geqslant \dim_H(f(M))$.

Задача 2.16. Докажите, что при билипшицевом отображении, размерность Хаусдорва не меняется ("размерность Хаусдорфа является билипшицевым инвариантом").

Задача 2.17 (*). Найдите размерность Хаусдорфа канторова множества $K \subset [0, 1]$.

Определение 2.6. Подмножество $Z \subset \mathbb{R}^n$ **имеет нулевую меру**, если для каждого ε существует счетное покрытие $\mathbb{Z}$ шарами U_i, с $\sum_i \mathrm{Vol}(U_i) < \varepsilon$.

Задача 2.18. Докажите, что счетное объединение множеств меры нуль имеет меру нуль.

Задача 2.19. Докажите, что при липшицевом отображении $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ образ множества нулевой меры тоже имеет меру нуль.

Задача 2.20 (!). Докажите, что при гладком отображении $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ образ множества нулевой меры тоже имеет меру нуль.

Задача 2.21 (!). Приведите пример непрерывного отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, которое переводит подмножество меры нуль в подмножество ненулевой меры.

Задача 2.22 (!). Пусть $M \subset \mathbb{R}^d$ подмножество, такое, что $\dim_H M < d$. Докажите, что M имеет меру нуль.

Определение 2.7. Пусть M – гладкое многообразие, с атласом $\{U_i, \phi_i : \ U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n\}$. Подмножество $Z \subset M$ **имеет меру нуль**, если образ $\phi_i(Z \cap U_i)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^n$, для каждого i.

Задача 2.23. Докажите, что это определение не зависит от выбора атласа на M.

Задача 2.24. Пусть $M \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ – гладкое отображение многообразий, а M – объединение счетного набора компактных подмножеств. Докажите, что $\dim_H(f(M)) \leqslant \dim M$

Указание. Сначала докажите, что на компактных подмножествах,f липшицево, а затем воспользуйтесь тем, что липшицевы отображения удовлетворяют $\dim_H(f(M)) \leqslant \dim M$.

Задача 2.25 (!). Пусть $M \xrightarrow{f} N$ – гладкое отображение многообразий, причем $\dim M < \dim N$. Докажите, что образ M имеет меру нуль.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Замечание. Эта теорема является частным случаем теоремы Сарда, которая утверждает, что множество критических значений гладкого отображения имеет меру нуль.

Задача 2.26 (**). Выведите из предыдущей задачи теорему Сарда.

2.2. Теорема Уитни (с ограничением на размерность)

Определение 2.8. Пусть $M \xrightarrow{f} N$ – гладкое отображение многообразий. Оно называется **иммерсией**, если в локальных координатах дифференциал $\mathcal{D}f$ является вложением.

Определение 2.9. Бутылка Клейна есть фактор двумерного тора $T^2 = S^1 \times S^1$ по действию группы $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, отображающей (t_1, t_2) в $(t_1 + \pi, -t_2)$.

Задача 2.27. Докажите, что это действие свободно, и фактор является многообразием.

Задача 2.28. Постройте иммерсию из бутылки Клейна в $\mathbb{R}^3$.

Задача 2.29 (!). Пусть $M \xrightarrow{f} N$ – гладкое отображение многообразий, причем образ замкнутого в M множества замкнут в N. Докажите, что f является гладким вложением тогда и только тогда, когда оно инъективно и является иммерсией.

Указание. Воспользуйтесь теоремой об обратной функции

Определение 2.10. Пусть $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ – вложенное гладкое m-мерное подмногообразие. **Касательная плоскость** к точке $p \in M$ есть плоскость в $\mathbb{R}^n$, касательная к M (то есть лежащая в образе дифференциала соответствующего отображения, заданного в локальных координатах), а **касательный вектор** есть любой вектор, лежащий в этой плоскости, с началом в p. Пространство касательных векторов в p обозначается T_pM. Если на $\mathbb{R}^n$ задана евклидова метрика, можно определить **пространство единичных касательных векторов** $S^{m-1}M$ как множество пар $(p \in M, v \in T_pM)$, где v – касательный вектор, удовлетворяющий $|v| = 1$.

Задача 2.30. Докажите, что $S^{m-1}M$ это многообразие, а естественная проекция $S^{m-1}M \longrightarrow M$ – гладкое отображение со слоем S^{m-1}.

Замечание. $S^{m-1}M$ называется **расслоение единичных касательных сфер** над M.

Задача 2.31 (*). Докажите, что $S^{m-1}M$ не зависит от вложения $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, то есть для двух разных вложений из M в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n'}$, соответствующие им многообразия $S^{m-1}M$ диффеоморфны.

Задача 2.32 (!). Пусть $M \overset{\phi}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^n$ – вложенное в $\mathbb{R}^n$ многообразие размерности m, $\lambda \in \mathbb{R}P^{n-1}$ прямая в $\mathbb{R}^n$, а $P_\lambda: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ – проекция на фактор $\mathbb{R}^n/\lambda \cong \mathbb{R}^{n-1}$.

а. Пусть $\Delta \subset M \times M$ это диагональ. Определим отображение $M \times M\backslash\Delta \xrightarrow{B} \mathbb{R}P^{n-1}$, переводящее пару точек $(x, y) \in M \times M$ в прямую, проходящую через $\phi(x) - \phi(y)$. Докажите, что $\phi \circ P_\lambda: M \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ инъекция тогда и только тогда, когда λ не лежит в образе B.

б. Определим отображение $S^{m-1}M \xrightarrow{B_0} \mathbb{R}P^{n-1}$, переводящее касательный вектор в соответствующую прямую. Докажите, что $\phi \circ P_\lambda: M \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ иммерсия тогда и только тогда, когда λ не лежит в образе B_0.

Задача 2.33 (!). Пусть $M \overset{\phi}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^n$ вложенное подмногообразие размерности m, $n > 2m + 2$. Докажите, что существует проекция $\mathbb{R}^n \xrightarrow{P} \mathbb{R}^{2m+2}$ такая, что $\phi \circ P: M \longrightarrow \mathbb{R}^{2m+2}$ – гладкое вложение.

Указание. Воспользуйтесь тем, что образы отображений B_0 и B из предыдущей задачи имеют меру нуль, и примените индукцию по n.

Задача 2.34. В условиях предыдущей задачи, докажите, что существует проекция $\mathbb{R}^n \xrightarrow{P} \mathbb{R}^{2m+1}$ такая, что $\phi \circ P: M \longrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ – иммерсия.

Задача 2.35. Всегда ли существует гладкое вложение n-мерного многообразия в $\mathbb{R}^{2n-1}$?

Задача 2.36 (**). Можно ли построить иммерсию проективного пространства $\mathbb{C}P^2$ в $\mathbb{R}^5$?

Задача 2.37. Пусть M – компактное, хаусдорфово многообразие размерности n. Докажите, что M допускает гладкое, замкнутое вложение в $\mathbb{R}^{2n+2}$.

Замечание. Уитни доказал, что любое хаусдорфово m-мерное многообразие со счетной базой топологии допускает замкнутое вложение в $\mathbb{R}^{2m}$. Это утверждение называется "сильная теорема Уитни".

2.3. Теорема Уитни (для некомпактных многообразий)

Задача 2.38. Пусть $\mathcal{P}$ – пространство вложений $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{2m+2}$, с естественной топологией. Докажите, что это многообразие. Постройте на нем гладкую структуру.

Задача 2.39. Пусть M – многообразие со счетной базой топологии.

а. Докажите, что M является объединением последовательности вложенных компактных множеств.

б. Докажите, что M допускает разбиение единицы.

Задача 2.40. Пусть M – n-мерное многообразие, $\{U_i, \phi_i : \ U_i \tilde{\longrightarrow} \mathbb{R}^n\}$ – локально конечный атлас, а $f_i\ U_i \longrightarrow [0,1]$ – соответствующее разбиение единицы. Рассмотрим отображение $\Psi_i : M \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$, построенное как в предыдущем листочке:

$$\Psi_i(p) := \begin{cases} \Psi_i(p) = \Big(f_i(p)\phi_i(p), f_i(p)\Big), \text{ если } p \in U_i \\ \Psi_i(p) = (0, ..., 0) \text{ если } p \notin U_i \end{cases}$$

Пусть $A_i \in \mathcal{P}$ – вложения $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{2m+2}$, параметризованные тем же набором индексов. Рассмотрим отображение $\Psi_A : \ M \longrightarrow \mathbb{R}^{2m+2}$, $\Psi_A(p) = \sum A_i(\Psi_i(p))$. Докажите, что это отображение корректно определено. Докажите, что его можно получить как композицию вложения $\bigoplus_i \Psi_i : \ M \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$ и линейной проекции $\mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^{2m+2}$.

Задача 2.41 (*). В условиях предыдущей задачи, пусть $M_0 \subset M$ – компактное подмножество, а $\bigcup_{i\in I} U_i \supset M_0$ соответствующее конечное подпокрытие в $\{U_i\}$, из k элементов. Докажите, что существует подмножество $Z_I \subset \mathcal{P}^k$ меры нуль, такое, что для всех наборов $\{A_i, i \in I\} \in \mathcal{P}^k$, не лежащих в Z_I, соответствующее отображение $\Psi_A : \ M_0 \longrightarrow \mathbb{R}^{2m+2}$ – гладкое вложение.

Указание. Воспользуйтесь доказательством теоремы Уитни, приведенным в предыдущей секции для компактных M.

Задача 2.42 (*). Обозначим за $\mathcal{P}^\infty$ произведение $\mathcal{P}$, проиндексированное тем же семейством индексов, что индексирует атлас $\{U_i\}$. Рассмотрим $\mathcal{P}^\infty$ с мерой Лебега произведения. Докажите, что множество Z всех $\{A_i\} \in \mathcal{P}$ таких, что Ψ_A не вложение, имеет меру нуль в $\mathcal{P}^\infty$.

Указание. По построению, Z есть объединение прообразов множеств $Z_I \subset \mathcal{P}^k$, построенных в задаче 2.41, при стандартной проекции $\mathcal{P}^\infty \xrightarrow{\Pi_I} \mathcal{P}^k$. Каждый из таких прообразов имеет меру нуль, значит, Z имеет меру нуль как объединение множеств меры нуль.