Для зачета по каждому листку надо сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Анализ 10: Эллиптические операторы

10.1. Дифференциальные операторы с коэффициентами в модуле

Определение 10.1. Пусть A, B — модули над кольцом R, которое определено над полем k. Пространство $\operatorname{Diff}^i(A,B)$ дифференциальных операторов порядка i определяется индуктивно.

Дифференциальные операторы нулевого порядка $\operatorname{Diff}^0(A,B)$ — это R-линейные отображения из A в B. k-линейное отображение $D: A \longrightarrow B$ лежит в $\operatorname{Diff}^i(A,B)$, если для любого $r \in R$, коммутатор

$$[D,r](a) = D(ra) - rD(a)$$

лежит в $\operatorname{Diff}^{i-1}(A,B)$.

Задача 10.1. Пусть A, B, C — R-модули, а $D_1: A \longrightarrow B$, $D_2: B \longrightarrow C$ - дифференциальные операторы порядка i, j. Докажите, что композиция $D_1 D_2$ — дифференциальный оператор порядка $i + j$.

Задача 10.2. Пусть R — кольцо полиномов $k[t]$, а B — R-модуль, одномерный как векторное пространство над k, с умножением, определенным посредством $tR = 0$. Докажите, что $\operatorname{Diff}^i(R,B)$ — это пространство всех k-линейных отображений из $k[t]$ в k, которые переводят t^{i+j} в 0, для всех $j > 0$.

Задача 10.3 (*). Пусть R — кольцо полиномов $k[t]$, а A и B - R-модули, конечномерные над k. Докажите, что $\operatorname{Diff}^*(A,B)$ — это пространство всех k-линейных отображений из A в B.

Задача 10.4 (*). Рассмотрим пространство всех дифференциальных операторов $\operatorname{Diff}^*(A,B)$ как пространство с фильтрацией, и пусть $S^i(A,B) := \operatorname{Diff}^i(A,B)/\operatorname{Diff}^{i-1}(A,B)$ — присоединенные градуированнные компоненты. Определите на пространстве $\oplus_i S^i(A,B)$ естественную структуру модуля над алгеброй $\oplus_i S^i$ символов дифференциальных операторов.

Определение 10.2. Пространство $\oplus_i S^i(A,B)$ называется **пространством символов дифференциальных операторов, действующих из A в B.**

Задача 10.5 (!). В условиях предыдущей задачи, докажите, что

$$\oplus_i S^i(F,G) \cong \mathsf{Sym}^i TM \otimes \operatorname{Hom}_{C^\infty M}(F,G), \tag{10.1}$$

где $\operatorname{Hom}_{C^\infty M}(F,G)$ — пространство сечений расслоения гомоморфизмов из F в G.

Указание. Докажите этот факт для случая, когда расслоения F и G тривиальны, а их пространства сечений изоморфны свободным модулям вида $C^\infty M^n$. Реализовав F и G как прямые слагаемые свободных модулей, выведите изоморфизм (10.1) из того, что он выполняется для тривиальных расслоений.

Задача 10.6. Пусть M — гладкое многообразие, на котором заданы два векторных расслоения F и G. Докажите, что дифференциальные операторы из F в G **локальны**: если $f \in F$ — сечение с носителем в $K \subset M$, то носитель $D(f)$ тоже содержится в K, для любого $D \in \operatorname{Diff}^i(F,G)$.

Задача 10.7 (*). Пусть $x \in M$ точка, а $\mathfrak{m}_x$ — ее максимальный идеал. Выполнен ли изоморфизм (10.1) в случае $F = C^\infty M$, $G = C^\infty M/\mathfrak{m}_x$? А в случае $G = C^\infty M$, $F = C^\infty M/\mathfrak{m}_x$?

10.2. Эллиптические операторы

Определение 10.3. Пусть F, G — векторные расслоения над гладким многообразием M, а $D \in \operatorname{Diff}^i(F,G)$ - дифференциальный оператор порядка i (мы обозначаем пространства сечений той же самой буквой, что и расслоения). Обозначим за $\mathsf{Symb}(D)$ класс D в

$$S^i(F,G) := \operatorname{Diff}^i(F,G)/\operatorname{Diff}^{i-1}(F,G)$$

Этот класс называется **символом** дифференциального оператора D. Воспользовавшись изоморфизмом (10.1), мы можем считать $\mathsf{Symb}(D)$ сечением расслоения $\mathsf{Sym}^i TM \otimes \operatorname{Hom}(F,G)$.

Задача 10.8. Обозначим за $\pi: T^*M \longrightarrow M$ стандартную проекцию. Постройте взаимно однозначное соответствие между сечениями $\mathsf{Sym}^i TM \otimes \operatorname{Hom}(F,G)$ и сечениями $\pi^* \operatorname{Hom}(F,G)$, которые заданы $\operatorname{Hom}(F,G)$-значными полиномами степени i на слоях π.

Замечание. В дальнейшем, мы будем рассматривать символ дифференциального оператора как $\operatorname{Hom}(F,G)$-значную функцию на T^*M, полиномиальную на слоях.

Задача 10.9 (!). Пусть $D_1: F \longrightarrow G$, $D_2: G \longrightarrow H$ - дифференциальные операторы. Вычислите символ композиции D_1D_2. Докажите, что символ D_1D_2 равен произведению символов D_1 и D_2, где символы D_1, D_2 рассматриваются как сечения $\pi^* \operatorname{Hom}(F,G)$, $\pi^* \operatorname{Hom}(G,H)$, полиномиальные по слоям, $\pi: T^*M \longrightarrow M$ это проекция, а произведение

$$\pi^* \operatorname{Hom}(F,G) \times \pi^* \operatorname{Hom}(G,H) \longrightarrow \pi^* \operatorname{Hom}(F,H)$$

задано композицией.

Определение 10.4. Пусть B — векторное расслоение над M, а $\operatorname{Tot} B$ его тотальное пространство. **Нулевым сечением** называется множество всех нулевых векторов в $\operatorname{Tot} B$.

Определение 10.5. Пусть F, G — n-мерные векторные расслоения над гладким многообразием M, $D \in \operatorname{Diff}^i(F,G)$ — дифференциальный оператор порядка i, а $\mathsf{Symb}(D) \in \mathsf{Sym}^i TM \otimes \operatorname{Hom}(F,G)$ — его символ. Рассмотрим $\mathsf{Symb}(D)$ как $\operatorname{Hom}(F,G)$-значную функцию на кокасательном пространстве T^*M, полиномиальную на слоях проекции $T^*M \xrightarrow{\pi} M$, то есть как сечение $s_D \in \pi^* \operatorname{Hom}(F,G)$. Оператор D называется **эллиптическим**, если s_D обратим вне нулевого сечения T^*M.

Задача 10.10. Пусть $M = \mathbb{R}^n$, а $\Delta: C^\infty M \longrightarrow C^\infty M$ — **классический оператор Лапласа**, заданный формулой

$$\Delta(f) = \sum_i \frac{d^2 f}{dx_i^2}$$

где x_i — стандартные координаты на $\mathbb{R}^n$. Найдите символ Δ. Докажите, что он эллиптичен.

Задача 10.11 (!). Найдите символ оператора Лапласа $\Delta: \Lambda^* M \longrightarrow \Lambda^* M$. Докажите, что он эллиптичен.

Задача 10.12 (!). Пусть $D_1, D_2: B \longrightarrow B$ — дифференциальные операторы на расслоении, такие, что композиция $D_1 D_2$ эллиптична. Докажите, что D_1 и D_2 — тоже эллиптические операторы.

Задача 10.13 (!). Докажите, что оператор $d + d^*: \Lambda^* M \longrightarrow \Lambda^* M$ эллиптический.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

10.3. Связность на расслоении

Задача 10.14. Пусть V — модуль над кольцом R. Рассмотрим модуль $\operatorname{End}(V) := \operatorname{Hom}_R(V, V)$ и $V^* := \operatorname{Hom}_R(V, R)$. Пусть $\chi: V \otimes V^* \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(V, V)$ переводит $v \otimes \xi$ в $\xi(v)$.

а. Докажите, что эта формула задает корректно определенный гомоморфизм R-модулей. Докажите, что χ — изоморфизм, если k это поле, а V — конечномерное векторное пространство.

б. [*] Пусть V — конечнопорожденный модуль над кольцом. Всегда ли χ — изоморфизм?

в. [*] Пусть V — бесконечномерное пространство над полем. Всегда ли χ — изоморфизм?

Задача 10.15. Рассмотрим дифференциал де Рама $d: C^\infty M \longrightarrow \Lambda^1 M$. Докажите, что его символ
$$\mathsf{Symb}(d) \in TM \otimes \operatorname{Hom}(C^\infty M, \Lambda^1 M) = TM \otimes T^* M$$
задается тождественным отображением $\mathsf{Id}_{TM} \in \operatorname{End}(TM) = TM \otimes T^* M$.

Определение 10.6. Пусть B — гладкое расслоение над M, а $\nabla: B \longrightarrow B \otimes \Lambda^1 M$ — оператор, удовлетворяющий соотношению
$$\nabla(fb) = b \otimes df + f \nabla b,$$
для любой функции $f \in C^\infty M$. Тогда ∇ называется **связностью** на расслоении B.

Задача 10.16. Постройте связность на тривиальном расслоении $C^\infty M$.

Задача 10.17. Докажите, что связность есть дифференциальный оператор первого порядка.

Задача 10.18. Докажите, что символ $\mathsf{Symb}(\nabla) \in TM \otimes \operatorname{Hom}(B, \Lambda^1 M \otimes B)$ связности ∇ задается тождественным отображением $\mathsf{Id}_{TM} \otimes \mathsf{Id}_B: TM \otimes T^* M \otimes \operatorname{Hom}(B, B)$.

Задача 10.19 (!). Докажите, что дифференциальный оператор $\delta: B \longrightarrow B \otimes \Lambda^1 M$ является связностью тогда и только тогда, когда его символ равен $\mathsf{Id}_{TM} \otimes \mathsf{Id}_B$.

Задача 10.20. Пусть ∇_A, ∇_B связности на расслоениях A и B. Зададим на $A \otimes B$ дифференциальный оператор по формуле Лейбница:
$$\nabla(a \otimes b) := \nabla_A(a) \otimes b + a \otimes \nabla_B(b).$$
Докажите, что это связность.

Задача 10.21. Пусть $B := B_1 \oplus B_2$ — прямая сумма векторных расслоений, причем на B задана связность ∇. Обозначим за π_1 естественную проекцию из B в B_1. Докажите, что

$$\nabla \circ \pi_1 \otimes \mathsf{Id}_{\Lambda^1 M}: \ B_1 \longrightarrow B_1 \otimes \Lambda^1 M$$

это связность на B_1.

Задача 10.22 (!). Докажите, что на любом расслоении существует связность.

Указание. Постройте связность для тривиального расслоения и воспользуйтесь предыдущей задачей.

10.4. Принцип максимума для эллиптических операторов второго порядка

Замечание. Пусть $D: \ C^\infty \mathbb{R}^n \longrightarrow C^\infty \mathbb{R}^n$ – дифференциальный оператор второго порядка, а $x_1, ..., x_n$ – координатные функции. Тогда D можно записать в виде

$$D(f) = \sum_{i,j} A^{ij} \frac{d^2 f}{dx_i dx_j} + \sum_i B^i \frac{df}{dx_i} + Cf, \tag{10.2}$$

где $A^{ij}: \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathsf{Sym}^2 \mathbb{R}^n$ матричнозначная функция на $\mathbb{R}^n$, $B^i: \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — 1-форма на $\mathbb{R}^n$, а C — функция (докажите это).

Задача 10.23. Пусть D — дифференциальный оператор на $\mathbb{R}^n$, заданный формулой (10.2).

а. Докажите, что A^{ij} это его символ.

б. Докажите, что D эллиптический тогда и только тогда, когда матрица A^{ij} положительно или отрицательно определена в каждой точке.

Определение 10.7. Пусть $D: \ C^\infty M \longrightarrow C^\infty M$ – оператор второго порядка, а $\mathsf{Symb}(D) \in S^2 TM$ его символ. Мы говорим, что $\mathsf{Symb}(D)$ **положительно определен**, если для каждого ненулевого вектора $\xi \in T^*$, имеем $\mathsf{Symb}(D)(\xi, \xi) > 0$.

Задача 10.24 (!). Пусть $D: \ C^\infty M \longrightarrow C^\infty M$ – эллиптический оператор второго порядка. Докажите, что символ $\mathsf{Symb}(D)$ положительно определен, либо $\mathsf{Symb}(-D)$ положительно определен.

Замечание. Отныне и до конца этого листочка, $D: \ C^\infty M \longrightarrow C^\infty M$ – эллиптический оператор второго порядка, причем символ D положительно определен, а $D(1) = 0$.

Задача 10.25. Пусть $f \in C^\infty M$ имеет локальный максимум в точке z. Докажите, что $D(f) \leqslant 0$.

Задача 10.26 (!). Пусть $f \in C^\infty M$, а $D(f) > 0$. Докажите, что у f не может быть локального максимума.

Задача 10.27. Пусть $D: \ C^\infty \mathbb{R}^n \longrightarrow C^\infty \mathbb{R}^n$ – эллиптический оператор, записанный по формуле (10.2), причем $C = 0$. Пусть $D(f) \geqslant 0$, а $\lambda \in \mathbb{R}^{>0}$ удовлетворяет $\lambda A^{1,1} > B^1$. Докажите, что $D(f + \phi_\varepsilon) > 0$, где $\phi_\varepsilon = \varepsilon e^{\lambda x_1}$, для любого $\varepsilon > 0$.

Задача 10.28. Пусть $D: C^\infty\mathbb{R}^n \longrightarrow C^\infty\mathbb{R}^n$ – эллиптический оператор, записанный по формуле (10.2), причем $C = 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ открытое множество с компактным замыканием, а f — функция, которая достигает максимума внутри Ω.

а. Докажите, что можно выбрать λ таким образом, чтобы $\lambda A^{1,1} > B^1$ на Ω.

б. Пусть $\delta := \sup_\Omega f - \sup_{\partial\Omega} f > 0$. Выберем ε таким образом, чтобы $\sup_\Omega \phi_\varepsilon < \frac{\delta}{2}$. Докажите, что $f + \phi_\varepsilon$ принимает максимум внутри области Ω.

в. Докажите, что $D(f + \phi_\varepsilon) > D(f)$

Задача 10.29 (!). (Слабый принцип максимума для эллиптических операторов).
Пусть $D: C^\infty M \longrightarrow C^\infty M$ – эллиптический оператор второго порядка, причем символ D положительно определен, а $D(1) = 0$, а f гладкая функция такая, что $D(f) \geqslant 0$. Тогда у f не может быть локальных максимумов.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 10.30 (**). (Сильный принцип максимума).
В условиях предыдущей задачи, докажите, что $f(m) < \sup_M f$ для каждой точки $m \in M$.

Задача 10.31. Докажите сильный принцип максимума, если $M = \mathbb{R}^n$, а D это оператор Лапласа.

Задача 10.32 (*). Пусть $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ – шар на пространстве $\mathbb{R}^n$ с обычной метрикой, с центром в 0 и радиусом R, а $x \in B_R(0)$ — любая точка, такая, что $3r < R$, где $r = |z|$. Докажите, что для любой неотрицательной гармонической функции f на $B_R(0)$ имеют место неравенства

$$f(x) \leqslant \frac{\int_{B_{2r}(0)} f}{\mathrm{Vol}(B_r)}$$

и

$$f(x) \geqslant \frac{\int_{B_{2r}(0)} f}{\mathrm{Vol}(B_{3r})}.$$

Задача 10.33 (*). (Неравенство Харнака) Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, замыкание которой компактно и содержится в шаре $B \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что найдется константа C такая, что для любой неотрицательной гармонической функции $f \in C^\infty B$, верно неравенство

$$\sup_\Omega f \geqslant C \inf_\Omega f$$