Теория меры, лекция 3: Булевы алгебры

Миша Вербицкий

28 февраля, 2015

матфак ВШЭ и НМУ

Решетки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $(M, \succcurlyeq)$ – частично упорядоченное множество, а S – его подмножество. **Верхняя грань** $\inf S$ есть элемент $m \in M$, который удовлетворяет $m \succcurlyeq s$ для каждого $s \in S$. **Точная верхняя грань** $\sup S$ есть такая верхняя грань $m \in M$, что для любой другой верхней грани m' имеем $m \preccurlyeq m'$. Аналогично определяется **точная нижняя грань** $\inf S$.

ЗАМЕЧАНИЕ: ТВГ и ТНГ не всегда существуют.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Решетка** это частично упорядоченное множество S такое, что для любых $s, s' \in S$ существует точная верхняя грань $s \vee s'$ и точная нижняя грань $s \wedge s'$.

ПРИМЕР: Множество 2^S подмножеств множества S, упорядоченных по включению, образует решетку.

ЗАМЕЧАНИЕ: Эти операции удовлетворяют следующим условиям **(докажите это).**

(*) Идемпотентность: $a \wedge a = a \vee a = a$.
(**) Коммутативность: $a \wedge b = b \wedge a, a \vee b = b \vee a$.
(***) Ассоциативность: $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$, $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.
(****) Абсорбция: $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$.

Булевы алгебры

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $(A, \vee, \wedge)$ множество, снабженное операциями $\vee, \wedge$, удовлетворяющими (*)-(****). Определим частичный порядок на A таким образом, что $x \preccurlyeq y$ когда $x \wedge y = y$ (в силу абсорбции, это эквивалентно $x \vee y = x$). **Тогда $(A, \preccurlyeq)$ это решетка** (проверьте это).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Единицей** решетки называется максимальный элемент, **нулем** – минимальный. **Дополнением** $\neg x$ для элемента решетки $x \in A$ называется такой $y \in A$, что $x \wedge y = 0$, $x \vee y = 1$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Булева алгебра** есть решетка A, допускающая единицу, нуль и операцию дополнения, и удовлетворяющая следующей **аксиоме дистрибутивности:**

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (a \wedge c), \quad (a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c).$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Из одной формулы для дистрибутивности, приведенной выше, выводится другая **(проверьте это)**.

...То, что символические процессы, изобретенные алгебраистами для численных вычислений, окажутся применимы для выражения каждого хода мысли, и предоставят грамматику и словарь для всеобъемлющей логической системы, казалось невероятным, пока это не было доказано. Когда Гоббс опубликовал свою книгу "Вычисление или логика", он наблюдал отдаленный отблеск некоторых идей, из тех, которые были освещены в трудах мистера Буля... (Август де Морган)

George Boole
(2 November 1815 – 8 December 1864)

Идемпотенты в кольце

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Идемпотент** кольца есть элемент, который удовлетворяет $a^2 = a$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что x **является идемпотентом тогда и только тогда, когда** $1 - x$ **– идемпотент.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Если x, y – идемпотенты в кольце, то xy, $1 - x$ и $1 - y$ – тоже идемпотенты. **Значит,** $x + y - xy = 1 - (1 - x)(1 - y)$ **– идемпотент.**

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть R – кольцо, а S – множество всех идемпотентов в R. Определим соотношение $\preccurlyeq$ на S следующим образом: $x \preccurlyeq y$, если $xy = x$. **Докажите, что это отношение частичного порядка.**

Идемпотенты и решетки

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть R – кольцо, а S – множество всех идемпотентов в R. Определим соотношение $\preccurlyeq$ на S следующим образом: $x \preccurlyeq y$, если $xy = x$. **Докажите, что это отношение частичного порядка.**

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть R – кольцо. Тогда **идемпотенты с вышеописанным отношением порядка образуют решетку,** где операции записываются так: $x \wedge y = xy$, и $x \vee y = x + y - xy$.

Доказательство. Шаг 1: Нужно доказать только, что $x, y \to xy$ дает ТНГ, а $x, y \to x + y - xy$ дает ТВГ. Если $z \preccurlyeq x, y$, то $zx = z, zy = z$ значит $zxy = z$, что дает $z \preccurlyeq xy$. **Поэтому $x, y \to xy$ это ТНГ.**

Шаг 2: Чтобы получить ТВГ, рассмотрим такую инволюцию в множестве I идемпотентов: $x \to 1-x$. Эта инволюция меняет порядок на противоположный, потому что если $xy = x$, то $(1-x)(1-y) = 1-x-y+xy = 1-y$. Также она меняет $\vee$ и $\wedge$. **Поэтому она делает из ТНГ ТВГ и наоборот.** ■

Булевы кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Булево кольцо** есть кольцо, все элементы которого - идемпотенты.

ЗАМЕЧАНИЕ: **В булевом кольце $1+1=0$.** Действительно, $(1+1)^2 = 1+1+1+1 = 1+1$.

ТЕОРЕМА: **(Маршалл Стоун)**
Пусть R – булево кольцо. **Тогда его решетка идемпотентов – булева алгебра.** Более того, **любая булева алгебра получается таким образом.**

Доказательство. Шаг 1: Наличие единицы, нуля и дополнения в такой решетке очевидно: 1 есть 1 кольца, 0 есть 0, а дополнение к x это $1-x$. Чтобы проверить дистрибутивность, вычисляем

$$
\begin{aligned}
(a\wedge c)\vee(a\wedge c) =& ac+bc+abc = (a\vee b)\wedge c,\\
(a\vee c)\wedge(b\vee c) =& (a+c+ac)(b+c+bc) = ab+ac+abc+bc+c+bc+ac+2abc =\\
=& ab+ac+abc = (a\wedge b)\vee c.
\end{aligned}
$$

Булевы кольца (продолжение)

ТЕОРЕМА: (Маршалл Стоун)
Пусть R – булево кольцо. **Тогда его решетка идемпотентов – булева алгебра.** Более того, **любая булева алгебра получается таким образом.**

Шаг 2: Чтобы доказать, что каждая булева алгебра получается таким образом, напишем произведение формулой $xy := x \wedge y$, а сумму $x + y := x \triangle y$, где $x \triangle y := (x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y)$ обозначает операцию в булевой алгебре, известную как "симметрическая разность" или же "исключающее ИЛИ". Ассоциативность и коммутативность умножения очевидна, а равно и коммутативность симметрической разности. Единица и 0 в булевом кольце те же, что и в алгебре. Дистрибутивность умножения следует из дистрибутивности $\wedge$ и $\vee$, но проверка чуть менее тривиальна.

Вместо прямого вычисления (которое элементарно, но не слишком красиво) я применю чуть более концептуальный аргумент, основанный на понятии идеала в булевой алгебре.

Булевы идеалы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A – булева алгебра, а $I \subsetneq A$ – подмножество в A. Оно назывется **идеалом**, если I замкнуто относительно операций $\vee$, $\wedge$ и $\neg$, и для каждых $a \in A, \xi \in I$, имеет место $a \wedge \xi \in I$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Отметим, что если булева алгебра A построена по булеву кольцу R, то **булевы идеалы в A – то же самое, что обычные идеалы в кольце R (проверьте).**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $I \subsetneq A$ – булев идеал. Определим такое соотношение в A: $x \sim_I y$, если для каких-то $\xi, \xi' \in I$, имеем $x \vee \xi = y \vee \xi'$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $\sim$ – соотношение эквивалентности, и на факторе $A/ \sim_I$ возникает естественная структура булевой алгебры (проверьте это). Такая булева алгебра называется **фактор-алгеброй по булеву идеалу I**, и обозначается A/I.

ЗАМЕЧАНИЕ: Булевы идеалы в A/I взаимно-однозначно соответствуют булевым идеалам в A, содержащим I (проверьте это).

Максимальные идеалы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Булев идеал $I \subset A$ называется **максимальным**, если $I \neq A$, и не существует иделов I', промежуточных между I и A, то есть удовлетворяющих $I \subsetneq I' \subsetneq A$.

ПРИМЕР: Пусть $A, \preccurlyeq$ – булева алгебра, а $a \in A$ – какой-то нееденичный элемент. **Тогда множество $I_a := \{b \in A \quad | \quad b \preccurlyeq a\}$ есть идеал в A.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Такой идеал называется **главным идеалом**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Если $I \subset A$ – максимальный идеал, то булева алгебра A/I состоит из двух элементов.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если в $A \backslash I$ есть нееденичный, ненулевой элемент t, тогда I_t – нетривиальный идеал в A/I, а его прообраз в A удовлетворяет $I \subsetneq I' \subsetneq A$. ■

Вложение булевой алгебры в функции на ее спектре

ЛЕММА: Пусть A – булева алгебра, а $x \in A$ – ненулевой элемент. Тогда **существует максимальный идеал, не содержащий x.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Это максимальный идеал, содержащий $\neg x$. ■

ТЕОРЕМА: Пусть A – булева алгебра, а $\mathfrak{S}$ – множество всех максимальных идеалов A. Рассмотрим произведение булевых алгебр $\prod_{I\in\mathfrak{S}} A/I$ и пусть $A \stackrel{\Psi}{\to} \prod_{I\in\mathfrak{S}} A/I$ – естественное отображение. **Тогда Ψ есть инъективный гомоморфизм булевых алгебр.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В силу леммы Цорна, каждый неединичный элемент булевой алгебры содержится в максимальном идеале, В силу предыдущей леммы, каждый ненулевой элемент лежит вне другого максимального идеала. Поэтому Ψ инъективен. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: **Теперь мы можем доказать теорему об эквивалентности булевых алгебр и колец.** Чтобы завершить ее доказательство, нам нужно было проверить два тождества в булевых алгебрах: ассоциативность симметрической разности, и дистрибутивность $\wedge$ относительно симметрической разности. **В булевой алгебре из двух элементов эти тождества тривиально выполняются (проверьте), а в силу предыдущего утверждения, этого уже достаточно.**

Неотрицательные меры

Пусть задано множество S. Множество всех подмножеств S обозначается 2^S. Оно снабжено естественной структурой булевой алгебры. Зафиксируем булеву подалгебру $\mathfrak{U} \subset 2^S$.

ЗАМЕЧАНИЕ: На множестве $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ определена операция сложения, таким образом, что $x + \infty = \infty$ и $\infty + \infty = \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функция $\mu : \mathfrak{U} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называется **конечно-аддитивной мерой**, если для любых непересекающихся $A, B \in \mathfrak{U}$, $\mu(A \coprod B) = \mu(A) + \mu(B)$. Мера называется **неотрицательной**, если к тому же $\mu(A) \geqslant 0$, для любого A.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из неотрицательности следует, что μ монотонна по отношению к частичному порядку: **если $a \subset b$, то $\mu(a) \leqslant \mu(b)$ (проверьте).**

ЗАМЕЧАНИЕ: Также из аддитивности следует, что $\mu(\emptyset) = 0$. **Действительно, $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \coprod \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset)$.**

Метрика, построенная по мере

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим множество I_μ всех $a \in A$ с $\mu(a) = 0$. **Легко видеть, что это булев идеал.** В самом деле, $\mu(a \vee b) + \mu(a \wedge b) = \mu(a) + \mu(b) = 0$ для $a, b \in I_\mu$. К тому же, для любого x и $a \in I_\mu$, $x \wedge a \preccurlyeq a$, значит $\mu(x \wedge a) \leqslant \mu(a) = 0$ в силу монотонности меры по отношению к частичному порядку.

ТЕОРЕМА: Пусть μ – конечно-аддитивная, неотрицательная мера на булевой алгебре A, а I_μ – идеал всех a с $\mu(a) = 0$. Определим отображение $d: \ (A/I_\mu) \times (A/I_\mu) \to [0, \infty]$ формулой $d(a, b) := \mu(a \triangle b)$, где $\triangle$ обозначает симметрическую разность. **Тогда d задает метрику на A/I_μ.** Более того, булевы операции $\wedge, \vee$ и $\neg$ непрерывны в топологии, заданной такой метрикой.

Доказательство. Шаг 1: Симметричность и рефлексивность метрики очевидны. Неравенство треугольника:

$$d(a, b) + d(b, c) = \mu(a \triangle b) + \mu(b \triangle c) = \geqslant \mu(a) + \mu(c) - \mu(a \cap b \cap c) \geqslant \mu(a \triangle c) = d(a, c).$$

Чтобы доказать непрерывность $\wedge, \vee$ и $\neg$, достаточно доказать непрерывность операций $\triangle, \cap = \wedge$ остальные через них выражаются.

Метрика, построенная по мере (продолжение)

ТЕОРЕМА: Пусть μ – конечно-аддитивная, неотрицательная мера на булевой алгебре A, а I_μ – идеал всех a с $\mu(a) = 0$. Определим отображение $d: (A/I_\mu) \times (A/I_\mu) \to [0, \infty]$ формулой $d(a, b) := \mu(a \triangle b)$, где $\triangle$ обозначает симметрическую разность. **Тогда d задает метрику на A/I_μ.** Более того, булевы операции $\wedge, \vee$ и $\neg$ непрерывны в топологии, заданной такой метрикой.

Шаг 2: Непрерывность $\triangle$ очевидна, ибо для любой последовательности $\{z_i\}$, сходящейся к z, имеем

$$d(z_i \triangle y, z \triangle y) = \mu((z_i \triangle y) \triangle (z \triangle y)) \leqslant \mu(z_i \triangle z) = d(z_i, z),$$

значит, $z_i \triangle y$ сходится к $z \triangle y$.

Непрерывность $\wedge$ следует из того, что $d(x \cap z_i, z \cap x) = \mu(x \cap (z_i \triangle z)) \leqslant d(z, z_i)$, в силу монотонности, значит, для любой последовательности $\{z_i\}$, сходящейся к z, последовательность $x \wedge z_i$ сходится к $z \wedge x$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Пусть A – булево кольцо, снабженное неотрицательной, аддитивной мерой μ, I_μ – идеал всех $a \in A$ с $\mu(a) = 0$, а $\widehat{A}_\mu$ – пополнение A/I_μ по метрике d, определенной выше. **Тогда $\widehat{A}_\mu$ – тоже булево кольцо.** ■

σ-алгебры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: σ-алгебра есть булева алгебра подмножеств S, замкнутая относительно счетных объединений.

ЗАМЕЧАНИЕ: Булева алгебра $(A, \preccurlyeq)$ является σ-алгеброй, если у каждого счетного семейства элементов A есть точная верхняя грань.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset 2^S$ – кольцо подмножеств, а μ – конечно-аддитивная, неотрицательная мера. Мера μ называется **σ-аддитивной,** или же **счетно-аддитивной**, если для любого покрытия $\bigcup X_i \supset X$ множества $X \in A$ счетным набором множеств, имеет место $\mu(X) \leqslant \sum \mu(X_i)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть A – кольцо подмножеств, снабженное счетно-аддитивной мерой. **Тогда для каждого набора непересекающихся множеств $X_i \in A$, имеет место $\mu(\coprod X_i) = \sum \mu(X_i)$.** В самом деле, $\coprod X_i$ содержит любое конечное объединение X_i, и, в силу монотонности меры, удовлетворяет $\mu(\coprod X_i) \geqslant \sum_{i \in \mathfrak{S}} \mu(X_i)$ для любого конечного (а значит, и бесконечного) набора индексов $\mathfrak{S}$. Это дает неравенство $\mu(\coprod X_i) \geqslant \sum \mu(X_i)$ для любой аддитивной, неотрицательной меры. Обратное неравенство следует из σ-аддитивности.

σ-алгебра борелевских множеств

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **σ-алгебра, порожденная набором подмножеств $A \subset 2^S$**, есть кольцо подмножеств, порожденных пересечениями, дополнениями и счетными объединениями элементов A.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Если $A \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ – алгебра многогранников, то порожденная ей σ-алгебра содержит все открытые множества.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Возьмем какое-то открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$ и представим его в виде счетного объединения компактов K_i (докажите, что это возможно). Каждая точка $z \in U$ имеет шарообразную окрестность $U \ni z$, содержащуюся в U; вписывая куб в шар, мы получим покрытие U многогранниками, содержащимися в U. Выбирая конечное покрытие у каждого K_i, мы получим счетное покрытие U многогранниками.
■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – топологическое пространство. **Борелевская σ-алгебра** есть σ-алгебра, порожденная всеми открытыми множествами.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы только что доказали, что **кольцо многогранников порождает борелевскую σ-алгебру.**

Пополнение булевой алгебры относительно меры

ТЕОРЕМА: Пусть A – булева алгебра подмножеств S, а μ конечно-аддитивная мера, такая, что $\mu(S)$ конечно. **Тогда пополнение $\hat{A}_\mu$ является σ-алгеброй.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть $X_1, X_2, ...$ – счетный набор непересекающихся элементов $\hat{A}_\mu$. Чтобы доказать, что A_μ есть сигма-алгебра, достаточно продемонстрировать, что у него есть точная верхняя грань. **Если последовательность $\{Y_n := \bigcup_{i=1}^n X_i\}$ является последовательностью Коши, ее предел и будет такой точной верхней гранью.** Действительно, $a_n := d(Y_n, \bigcup_{i=1}^\infty X_i) = \sum_{i=0}^\infty d(Y_{n+i}, Y_{n+i+1})$ а $\lim_n a_n = 0$ тогда и только тогда, когда Y_n – последовательность Коши.

Шаг 2: Поскольку $\mu(S)$ конечно, ряд $\sum \mu(X_i)$ сходится. Значит, $a_n := \mu\left(\bigcup_{i=n}^\infty X_i\right)$ стремится к нулю. С другой стороны, для $k < l$, имеем

$$d(Y_k, Y_l) = \sum_{i=k}^{l} \mu(X_i) \leqslant a_k$$

значит $\{Y_i\}$ – последовательность Коши. ■

Измеримые множества

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset 2^S$ – булева алгебра подмножеств S, снабженная счетно-аддитивной, неотрицательной мерой μ, а $R \subset S$ – какое-то подмножество. Мы говорим, что R **имеет меру 0**, если для каждого $\varepsilon > 0$, множество R можно покрыть счетным объединением $X_i \in A$, с $\sum \mu(X_i) < \varepsilon$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **счетное объединение множеств меры 0 имеет меру 0.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Алгебра измеримых множеств** есть σ-алгебра в $\mathbb{R}^n$, порожденная борелевскими множествами и множествами меры 0.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Множества меры нуль образуют булев идеал в алгебре измеримых множеств (докажите это).**