Теория меры, лекция 2: третья проблема Гильберта

Миша Вербицкий

21 февраля, 2015

матфак ВШЭ и НМУ

Кольцо многогранников (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть задано множество S. Множество всех подмножеств S обозначается 2^S. Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^S$ - некоторый набор подмножеств S. $\mathfrak{U}$ называется **кольцом**, если для любых $A, B \in \mathfrak{U}$, объединение $A \cup B$, пересечение $A \cap B$ и дополнение $A \backslash B$ принадлежит $\mathfrak{U}$. В этом случае $\mathfrak{U}$ называется **подкольцом** в 2^S.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\mathfrak{V} \subset 2^S$ - произвольный набор подмножеств. Минимальное подкольцо в 2^S, содержащее $\mathfrak{V}$, называется **подкольцом, порожденным** $\mathfrak{V}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть задано подмножество $S \subset \mathbb{R}^n$. **Выпуклой оболочкой** S называется пересечение всех выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$, содержащих S.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Симплексом** в $\mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка множества $\{x_0, ...x_n\}$ из $n+1$ точек в $\mathbb{R}^n$. Такой симплекс называется **натянутым на точки** $x_0, ...x_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Кольцо полиэдров (многогранников)** есть кольцо подмножеств в $\mathbb{R}^n$, порожденное замкнутыми симплексами. **Многогранником** называется элемент этого кольца.

Разрезание многогранников

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Вырожденный симплекс** есть симплекс, лежащий в какой-то гиперплоскости. **Вырожденный многогранник** есть элемент кольца подмножеств, порожденного вырожденными симплексами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Многогранник называется **приведенным**, если он является замыканием открытого многогранника.

ЗАМЕЧАНИЕ: В дальнейшем все многогранники предполагаются по умолчанию приведенными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Разрезание** приведенного многогранника есть разбиение его замыкания в объединение многогранников $A_1, ..., A_n$ таким образом, что все пересечения $A_i \cup A_j$, $i \neq j$ вырождены.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Триангуляция** многогранника есть разрезание его на симплексы.

Конечно-аддитивные функции (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\mathfrak{U} \subset 2^S$ – кольцо подмножеств. Функция $\mu : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ называется **аддитивной**, или **конечно-аддитивной**, если для любых $A, B \in \mathfrak{U}$, которые не пересекаются, имеет место $\mu(A \coprod B) = \mu(A) + \mu(B)$ (объединение непересекающихся подмножеств обозначают $A \coprod B$).

ЗАМЕЧАНИЕ: Конечная аддитивность функции μ равносильно выполнению соотношения

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

(докажите это)!

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Два подмножества называются **конгруэнтными**, если одно в другое можно перевести движением. Валюация $\mu : \mathfrak{U} \to \mathbb{R}$ называется **инвариантной относительно движений**, если $\mu(A) = \mu(B)$ для конгруэнтных фигур $A, B \subset \mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Объем многогранника** есть конечно-аддитивная, неотрицательная, ненулевая функция на кольце многогранников, инвариантная относительно движений, зануляющаяся на вырожденных многогранниках, и равная 1 на единичном кубе.

Равносоставленность

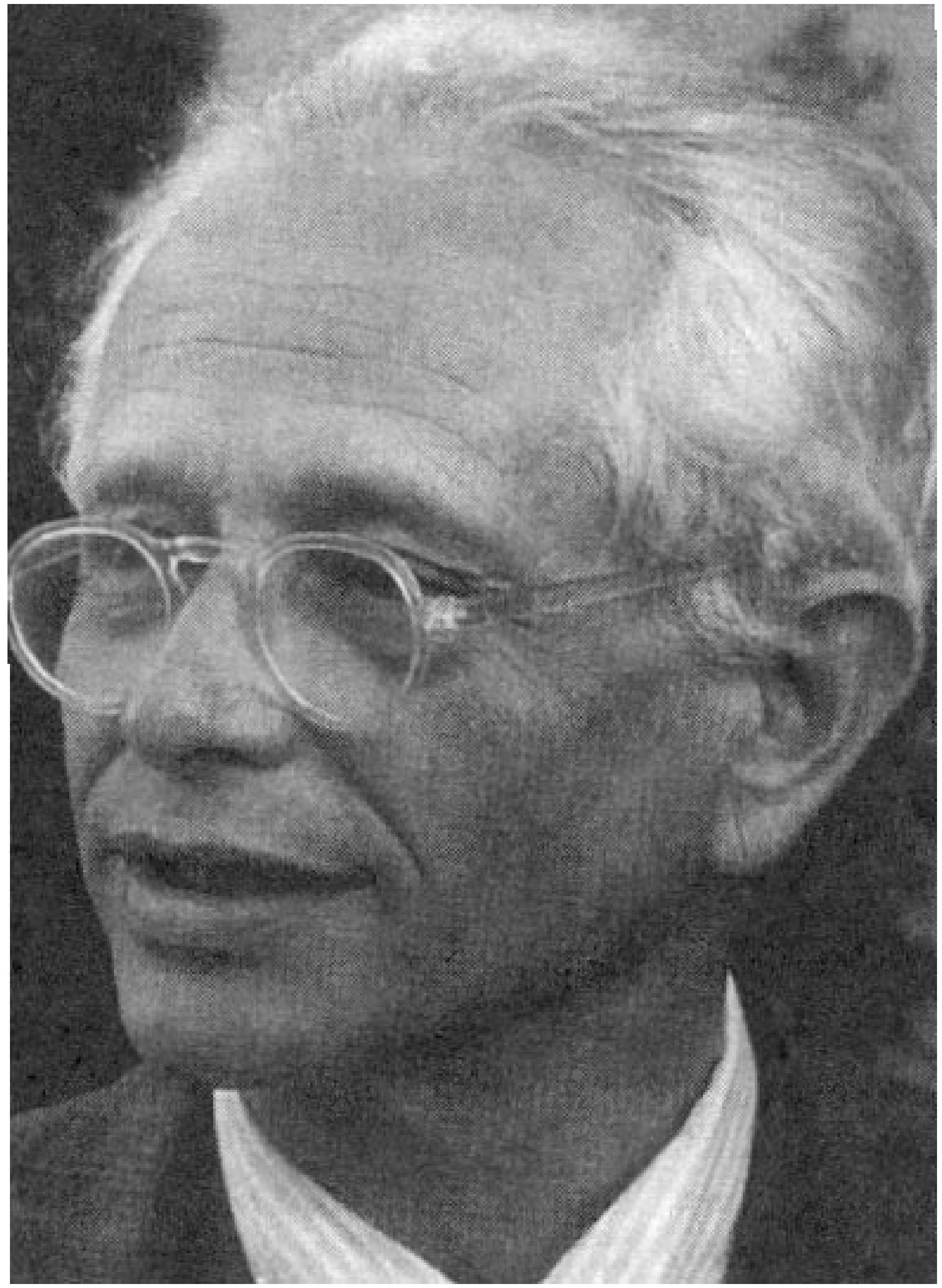
ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Два многогранника M, M' называются **равносоставленными**, если они допускают разрезание на многогранники вида $M = \bigcup A_i$, $M' = \bigcup A'_i$, причем A_i и B_i конгруэнтны.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **равносоставленность есть отношение эквивалентности.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Два многогранника называются **равновеликими**, если они имеют одинаковый объем.

ЗАМЕЧАНИЕ: Легко видеть, что равносоставленные многогранники равновелики. Обратное утверждение: "верно ли, что равновеликие многогранники равносоставлени"? составляет "Третью проблему Гильберта" (1900). Она была решена Максом Деном в 1901.

ТЕОРЕМА: **(Макс Ден)**
Куб в $\mathbb{R}^3$ не равносоставлен равностороннему тетраэдру того же объема.



Max Dehn
(November 13, 1878 – June 27, 1952)

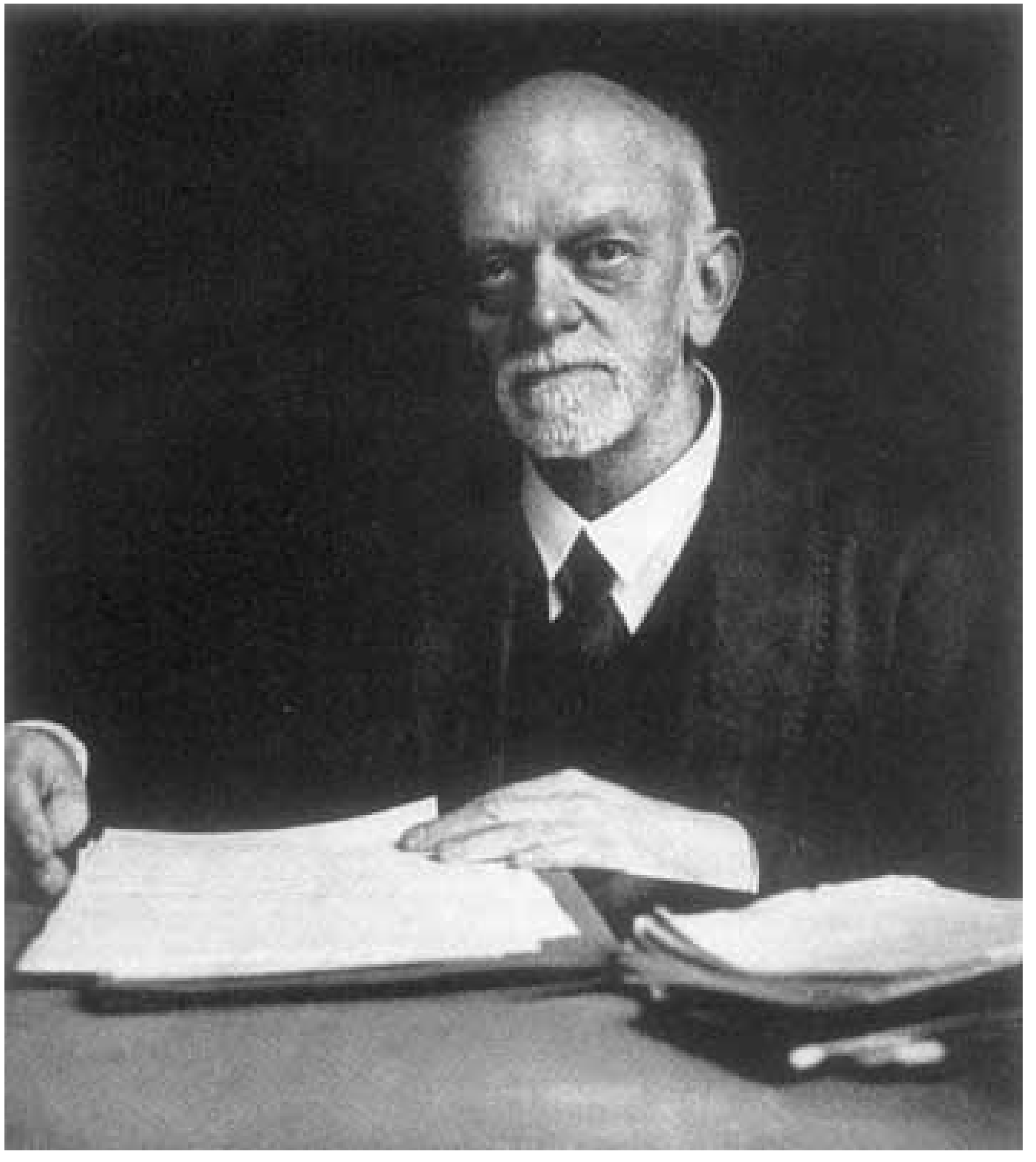
Третья проблема Гильберта

...Гаусс в двух своих письмах к Герлингу выражает сожаление по поводу того, что некоторые известные положения стереометрии зависят от метода исчерпывания, т.е., говоря современным языком, от аксиомы непрерывности (или от аксиомы Архимеда).

Гаусс специально отмечает теорему Евклида, согласно которой объемы треугольных пирамид, имеющих равные высоты, относятся как площади их оснований. Аналогичная задача планиметрии ныне полностью решена. Герлингу удалось также доказать равенство объемов симметричных многогранников при помощи разбиения их на конгруэнтные части.

Тем не менее, как мне кажется, в общем случае доказательство упомянутой теоремы Евклида этим способом провести невозможно и это, повидимому, может быть подтверждено строгим доказательством невозможности.

Такое доказательство можно было бы получить, если бы удалось указать такие два тетраэдра с равными основаниями и равными высотами, которые никаким способом не могут быть разложены на конгруэнтные тетраэдры и которые также не могут быть дополнены конгруэнтными тетраэдрами до таких многогранников, для которыхй разложение на конгруэнтные тетраэдры невозможно.



David Hilbert
(January 23, 1862 – February 14, 1943)

Теорема Бойяи-Гервина

В $\mathbb{R}^2$ равносоставленность следует из равновеликости. Напомню, что **многоугольник** это многогранник на плоскости $\mathbb{R}^2$

ТЕОРЕМА: (теорема Бойяи-Гервина)
Равновеликие многоугольники равносоставлены.

ЗАМЕЧАНИЕ: Эта теорема доказана независимо Уильямом Уоллесом в 1807, отцом Яноша Бойяи Фаркашем Бойяи в 1833, и Полем Гервином в 1835-м.

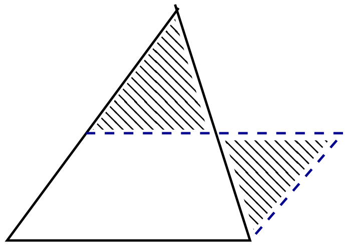
Мы выведем эту теорему из следующей леммы.

ЛЕММА: Любой треугольник равносоставлен прямоугольнику той же площади.

Равносоставленность треугольников

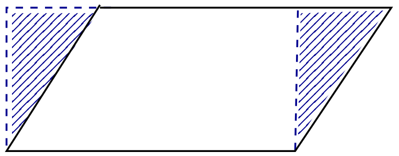
ЛЕММА: Любой треугольник равносоставлен прямоугольнику той же площади.

Доказательство. Шаг 1:



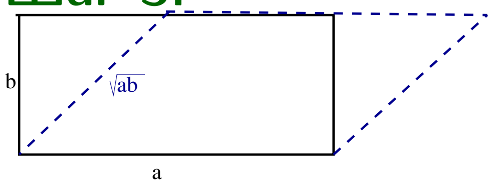
Любой треугольник равносоставлен параллелограмму с тем же основанием и одним из углов.

Шаг 2:



Любой параллелограмм равносоставлен прямоугольнику с тем же основанием.

Шаг 3:



Прямоугольник со сторонами $a > b$ равносоставлен параллелограмму со сторонами a и $\sqrt{ab}$.

Шаг 4: Применяя шаг 3, мы убеждаемся, что любой прямоугольник с площадью $S = ab$ равносоставлен параллелограмму с основанием $\sqrt{S}$. Применяя шаг 2, находим прямоугольник, равносоставленный этому параллелограмму (в частности, площади S) и с основанием $\sqrt{S}$. Такой прямоугольник будет квадратом. **Мы получили, что любой прямоугольник равносоставлен квадрату той же площади.** ■

Теорема Бойяи-Гервина (окончание)

ТЕОРЕМА: (теорема Бойяи-Гервина)
Равновеликие многоугольники равносоставлены.

Доказательство: Возьмем какой-то многоугольник M и триангулируем его. Каждый из полученных треугольников D_i разрежем на куски, получив прямоугольник с основанием 1 и стороной $\operatorname{Vol}(D_i)$. Составив их вместе, получим прямоугольник со сторонами 1 и $\operatorname{Vol}(M)$, равносоставленный M. Сделав такую же операцию с другим многоугольником с той же площадью, снова получим прямоугольник со сторонами 1 и $\operatorname{Vol}(M)$. Значит, они равносоставлены. ■

Конечно-аддитивные меры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Конечно-аддитивная мера** есть конечно-аддитивная, инвариантная функция $\mu : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ на кольце многогранников, которая равна нулю на всех вырожденных многогранниках.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если существует конечно-аддитивная мера такая, что $\mu(A) \neq \mu(B)$, то эти многогранники очевидно не равносоставлены. Поэтому, **чтобы получить контрпример к третьей проблеме Гильберта, достаточно построить конечно-аддитивную меру, которая будет различать равновеликие многогранники.**

ЗАМЕЧАНИЕ: В $\mathbb{R}^2$ конечно-аддитивной меры, различающей равновеликие многоугольники, не бывает, что следует из теоремы Бойяи-Гервина. Такая мера существует в $\mathbb{R}^3$, и называется **инвариантом Дена**, в честь Макса Дена, построившего ее в 1900-м году.

Инвариант Дена

Рассмотрим $\mathbb{Q}$-линейный гомоморфизм $\mathbb{R} \xrightarrow{\theta} \mathbb{R}$, зануляющийся на π. Чтобы построить такой гомоморфизм, надо выбрать базис в $\mathbb{R}$ как в векторном пространстве над $\mathbb{Q}$ (существование такого базиса следует из леммы Цорна) и задать θ на базисных векторах, таким образом, что $\theta(\pi) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Существует не один инвариант Дена, а целое семейство; они параметризуются гомоморфизмами $\mathbb{R} \xrightarrow{\theta} \mathbb{R}$, где $\theta(\pi) = 0$. Зафиксируем такой гомоморфизм, и пусть A – многогранник в $\mathbb{R}^3$, с ребрами длины $d_1, ..., d_n$ и двугранными углами $\alpha_1, ..., \alpha_n$ в этих ребрах, измеренными в радианах. Положим $D_\theta(A) := \sum_i d_i \theta(\alpha_i)$. Эта функция называется **инвариантом Дена**.

Аддитивность инварианта Дена

УТВЕРЖДЕНИЕ: Определенный выше инвариант Дена D_θ определяет конечно-аддитивную меру на кольце многогранников.

Доказательство. Шаг 1: Разрежем многогранник A на два многогранника A_1 и A_2. Некоторые ребра A окажутся целиком на L; в этом случае соответствующие двугранные углы у A_1 и A_2 дают в сумме двугранный угол для A. Другие ребра будут разрезаны на две части, и соответствующий двугранный угол в A_1 будет равен его аналогу у A_2. Значит, эти ребра дают в инвариант Дена A вклад, который равен сумме их вкладов в инвариант Дена A_1 и A_2. Наконец, для всех новых ребер, лежащих на L, соответствующие двугранные углы дают в сумме π. Значит, суммарные вклады этих ребер в $D_\theta(A_1)$ и $D_\theta(A_2)$ сокращаются, что дает $D_\theta(A_1) + D_\theta(A_2) = D_\theta(A)$. ■

Вычисление инварианта Дена

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **инвариант Дена параллелепипеда равен нулю.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Если мы найдем многогранник M с нетривиальным инвариантом Дена D_θ, это даст решение третьей проблемы Гильберта, потому что $D_\theta(M) \neq 0$, а $D_\theta(M') = 0$ для параллелепипеда M', равновеликого M.

ЗАМЕЧАНИЕ: В качестве M можно взять, например, правильный тетраэдр Δ. Все ребра и все двугранные углы тетраэдра равны, что дает $D_\theta(\Delta) = 6\theta(\alpha)$, где α – двугранный угол правильного тетраэдра. Нетрудно убедиться, что $\alpha = \arccos(1/3)$, но чтобы найти θ, удовлетворяющий $\theta(\alpha) \neq 0$, **надо доказать, что $\frac{\alpha}{\pi}$ иррационально.** Решение этой теоретико-числовой задачи излагаеся в листочке 2.

Обобщение инварианта Дена

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – $\mathbb{Q}$-линейный гомоморфизм, а $\mathbb{R} \xrightarrow{\theta} \mathbb{R}$ гомоморфизм, удовлетворяющий $\theta(\pi) = 0$. Для многогранника A в $\mathbb{R}^3$, с ребрами длины $d_1, ..., d_n$ и двугранными углами $\alpha_1, ..., \alpha_n$ в этих ребрах, положим $D_{\xi,\theta} := \sum_i \xi(d_i)\theta(\alpha_i)$. Этот инвариант называется **обобщенным инвариантом Дена**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Аргумент, который использовали для вывода конечной аддитивности инварианта Дена, доказывает, что $D_{\xi,\theta}$ **тоже задает конечно-аддитивную меру на многогранниках.**

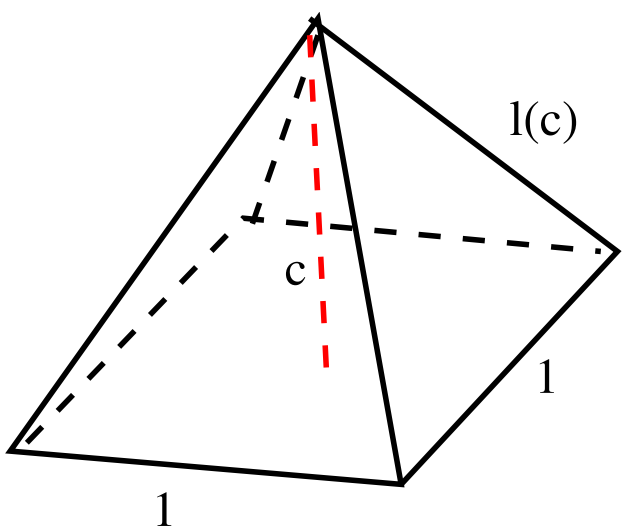
УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что существуют $\mathbb{Q}$-линейные гомоморфизмы $\xi, \theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что что $\ker(\xi) = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, а $\ker(\theta) = \mathbb{Q}\pi \subset \mathbb{R}$.

Выберем ξ, θ как в этом упражнении.

Обобщенный инвариант Дена и квадратная пирамидка

ЗАМЕЧАНИЕ: Следующее утверждение доказывает, что **в $\mathbb{R}^3$ существуют равновеликие и не равносоставленные многогранники.**

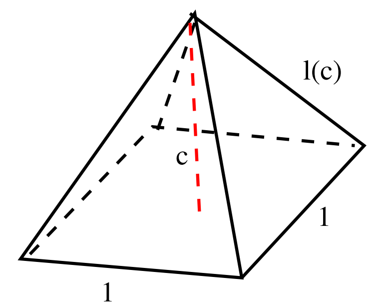
УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть A_c - четырехгранная симметричная пирамидка, с квадратным основанием и высотой c, причем ребро при основании имеет длину 1. **Тогда $D_{\xi,\theta}(A_c) \neq 0$ для почти всех $c \in \mathbb{R}^{>0}$.**



Пирамида с квадратным основанием

Квадратная пирамидка (продолжение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть A_c - четырехгранная симметричная пирамидка, с квадратным основанием и высотой c, причем ребро при основании имеет длину 1. **Тогда $D_{\xi,\theta}(A_c) \neq 0$ для почти всех $c \in \mathbb{R}^{>0}$.**



Доказательство. Шаг 1: У этой пирамидки есть два вида ребер, четыре ребра длины 1 у основания, и 4 длины $l(c)$, соединяющие основание и вершину. Обозначим двугранные углы у этих ребер за $\alpha(c)$, Поскольку $\xi(1) = 0$, получаем

$$D_{\xi,\theta}(A_c) = 4\xi(l(c))\theta(\alpha(c)).$$

В силу того, что $\ker \xi = \mathbb{Q}$, а $\ker \theta = \pi\mathbb{Q}$, получаем, что $D_{\xi,\theta}(A_c) = \frac{1}{4}\xi(l(c))\theta(\alpha(c)) = 0$, **только если $l(c)$ либо $\frac{\alpha(c)}{\pi}$ рациональны.**

Шаг 2: Поскольку числа $l(c)$ и $\alpha(c)$ монотонно возрастают и убывают при увеличении c, $l(c)$ может быть рационально только для счетного набора

c, и то же самое верно для $\frac{\alpha(c)}{\pi}$. **Выбрав c вне этих счетных подмножеств, мы отыщем пирамидку с нетривиальным инвариантом $D_{\xi,\theta}$.**

■