Для зачета по каждому листку надо сдать все задачи со звездочками, кроме двух либо все задачи без звездочек, кроме четырех. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

Теория меры 2: Инвариант Дена и булевы алгебры

2.1. Равносоставленность многогранников

Определение 2.1. **Разрезание** многогранника есть разбиение его замыкания в объединение многогранников $A_1, ..., A_n, B$ таким образом, что все пересечения $A_i \cap A_j$, $i \neq j$ вырождены, и B тоже вырожден. **Триангуляция** многогранника есть разрезание его на симплексы.

Задача 2.1. Докажите, что любой выпуклый многогранник допускает триангуляцию.

Задача 2.2. Докажите, что любой многогранник допускает триангуляцию.

Задача 2.3 (*). Докажите, что для любого многогранника D можно найти конечный набор гиперплоскостей L_i такой, что все связные компоненты дополнения $D \backslash \bigcup_i L_i$ суть симплексы, или найдите контрпример.

Определение 2.2. Два многогранника A, B называются **равносоставленными**, если их можно триангулировать, разрезав на многогранники $A_1, ...A_k$, $B_1, ...B_k$ таким образом, что A_i конгруэнтен B_i для любого i.

Задача 2.4. Докажите, что равносоставленность это соотношение эквивалентности.

Задача 2.5. Докажите, что любой треугольник A равносоставлен паралеллограмму с таким же основанием и высотой в половину высоты A.

Задача 2.6. Пусть A, B – два параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что A равносоставлен паралеллограмму, который получается из B гомотетией.

Задача 2.7. Докажите, что любой паралеллограмм в $\mathbb{R}^2$ равносоставлен прямоугольнику с таким же основанием и же высотой.

Задача 2.8 (*). Докажите, что прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ со сторонами a и b и прямоугольник со сторонами c и d равносоставлены, при условии $ab = cd$.

2.2. Третья проблема Гильберта

Замечание 2.1. **Объемом многогранника** называется функция $\operatorname{Vol}_\Lambda$, построенная в листке 1.

Определение 2.3. Два многогранника называются **равновеликими**, если они имеют одинаковый объем. Было доказано что равносоставленные многогранники равновелики.

Третья проблема Гильберта: Постройте два равновеликих многогранника, которые не равносоставлены.

Задача 2.9 (*). Пусть A и B равновеликие многогранники на плоскости (многогранники на плоскости называются **многоугольники**, или **полигоны**). Докажите, что они равносоставлены.

Замечание 2.2. Это утверждение называется **теорема Бойяи-Гервина**.

Замечание 2.3. Предположим, что существует конечно-аддитивная мера $\mu: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ на кольце многогранников, такая, что $\mu(A) \neq \mu(B)$, а A и B равновелики. Тогда A и B не равносоставлены.

Задача 2.10 (!). Выведите из теоремы Бойяи-Гервина следующее утверждение. Пусть задана конечно-аддитивная мера $\mu: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, где $\mathfrak{U}$ - кольцо многоугольников (многогранников в $\mathbb{R}^2$). Докажите, что $\mu = \operatorname{Vol} \circ \xi$, где $\operatorname{Vol}: \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ конечно-аддитивная мера, заданная объемом, а $\xi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ - $\mathbb{Q}$-линейный гомоморфизм абелевых групп.

Задача 2.11. Постройте нетривиальный (не $\mathbb{R}$-линейный) $\mathbb{Q}$-линейный гомоморфизм $\xi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Используйте аксиому выбора.

Задача 2.12 (!). Докажите, что такой гомоморфизм обязательно переводит некоторые положительные числа в отрицательные.

Определение 2.4. Пусть задан $\mathbb{Q}$-линейный гомоморфизм $\phi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, переводящий π в 0, а C - многогранник в $\mathbb{R}^3$, с ребрами длины $d_1, ...d_n$ и прилежащими им двугранными углами, выраженными (в радианах) как $\alpha_1, ...\alpha_n$. Инвариант Дена $D_\phi(C)$ записывается как

$$D_\phi(C) := \sum_{i=1}^n d_i \phi(\alpha_i).$$

Задача 2.13 (!). Докажите, что пространство $\mathbb{Q}$-линейных гомоморфизмов, переводящих π в 0, не пусто, и его мощность больше континуума.

Определение 2.5. Это множество наделяется структурой векторного пространства над $\mathbb{R}$:

$$\lambda(\phi)(c) = \lambda\phi(c).$$

Оно называется **пространством инвариантов Дена**.

Задача 2.14. Докажите, что пространство инвариантов Дена бесконечномерно над $\mathbb{R}$. Докажите, что для любого числа $\lambda \in R$ существует гомоморфизм $\phi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, такой, что $\phi(\lambda) \neq 0$, при условии, что λ/π иррационально. Воспользуйтесь аксиомой выбора.

Задача 2.15 (!). Пусть симплекс Δ представлен в виде объединения симплексов $\Delta = \bigcup_i \Delta_i$, пересекающихся по граням. Докажите, что

$$D_\phi(\Delta) = \sum_i D_\phi(\Delta_i)$$

Задача 2.16 (*). Докажите, что инвариант Дена D_ϕ является конечно-аддитивной мерой на пространстве многогранников в $\mathbb{R}^3$.

Задача 2.17. Рассмотрим правильный тетраэдр. Докажите, что его двугранные углы равны $\arccos(1/3)$.

Задача 2.18. Пусть $\cos(\pi\alpha) = 1/n$, а α рационально. Выведите из этого, что

$$e^{\sqrt{-1}\pi k\alpha} = \left(\frac{1}{n} + \sqrt{-1}\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\right)^k = 1.$$

для какого-то целого $k > 0$.

Задача 2.19 (*). Пусть $n = 3$, а $\left(\frac{1}{n} + \sqrt{-1}\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\right)^k = 1$. Докажите, что $k = 0$.

Указание. Докажите однозначность разложения на множители в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ и воспользуйтесь ею.

Задача 2.20 (*). Обозначим за α двугранный угол правильного тетраэдра. Докажите, что $\frac{\alpha}{\pi}$ иррационально.

Задача 2.21 (*). Найдите такое D_ϕ в пространстве инвариантов Дена что $D_\phi(\alpha) \neq 0$, где α - двугранный угол правильного тетраэдра.

Задача 2.22 (*). В условиях предыдущей задачи, докажите, что $D_\phi(\Delta) \neq 0$, где Δ есть правильный тетраэдр.

Задача 2.23. Докажите, что $D_\phi(C) = 0$ для любого параллелепипеда.

Задача 2.24 (*). Докажите, что равновеликие правильный тетраэдр и правильный куб не равносоставлены.

2.3. Булевы алгебры

Определение 2.6. Решетка это множество L, наделенное алгебраическими бинарными операциями $\wedge$ и $\vee$: $L \times L \longrightarrow L$, которые удовлетворяют следующим условиям.

а. Идемпотентность: $a \wedge a = a \vee a = a$.

б. Коммутативность: $a \wedge b = b \wedge a, a \vee b = b \vee a$.

в. Ассоциативность: $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$, $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.

г. Абсорбция: $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$.

Задача 2.25. . Пусть $(S, \preceq)$ частично упорядоченное множество, такое, что для любых x, y, задана **точная верхняя грань** (такой элемент $(x \vee y) \succeq x, y$, что любой $z \succeq x, y$ удовлетворяет $z \succeq (x \vee y)$) и **точная нижняя грань** (такой элемент $(x \wedge y) \preceq x, y$, что любой $z \preceq x, y$ удовлетворяет $z \preceq (x \wedge y)$). Докажите, что это решетка.

Задача 2.26 (!). Пусть L решетка. Введем на L соотношение $x \preceq y$, если $x \wedge y = x$.

а. Докажите, что $x \preceq y$ тогда и только тогда, когда $x \vee y = y$.

б. Докажите, что $x \preceq y$ есть соотношение частичного порядка.

в. Рассмотрим $(L, \preceq)$ как частично упорядоченное множество. Докажите, что в нем есть точная верхняя и нижняя грань. Докажите, что они выражаются как $(x \vee y)$, $(x \wedge y)$.

г. Докажите, что любую решетку можно получить из частично упорядоченного множества способом, описанным в задаче 2.25.

Задача 2.27. Пусть R факториальное кольцо. Постройте решетку, пользуясь операцией взятия наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя.

Задача 2.28. Рассмотрим такое соотношение частичного порядка на 2^S: $x \preceq y$, если $x \subset y$. Докажите, что в $(2^S, \preceq)$ существуют точная верхняя и нижняя грань. Докажите, что соответствующие операции это пересечение и объединение множеств.

Определение 2.7. Булева алгебра это способ аксиоматизации операций пересечения и объединения в алгебре подмножеств. Булевы алгебры названы так по имени английского математика Джорджа Буля.

Булева алгебра $(A, \vee, \wedge)$ это решетка, удовлетворяющая следующим условиям

а. Ограниченность снизу: в A есть элемент 0 такой, что $x \wedge 0 = 0$.

б. Ограниченность сверху: в A есть элемент 1 такой, что $x \vee 1 = 1$.

в. Дистрибутивность: $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (a \wedge c)$.

г. Существование дополнений: для любого $x \in A$ существует $\neg x$ такой, что $x \wedge \neg x = 0$, $x \vee \neg x = 1$.

Задача 2.29. Докажите, что 0, 1, $\neg x$ однозначно определяются структурой решетки на A.

Задача 2.30. Докажите, что $\neg 0 = 1$, $\neg 1 = 0$.

Задача 2.31. Докажите законы де Моргана: $\neg(a \vee b) = (\neg a) \wedge (\neg b)$, $\neg(a \wedge b) = (\neg a) \vee (\neg b)$.

Задача 2.32. (двойственность булевых алгебр) Дана булева алгебра $(A, \vee, \wedge)$. Рассмотрим операции $\vee_1 := \wedge$, $\wedge_1 := \vee$. Докажите, что $(A, \wedge, \vee)$ это тоже булева алгебра.

Задача 2.33. Постройте булеву алгебру из двух элементов.

Задача 2.34. Пусть R (коммутативное) кольцо, а V множество идемпотентов (элементов, удовлетворяющих $a^2 = a$). Рассмотрим операции $e \vee f = e + f - ef$, $e \wedge f = ef$. Докажите, что это булева алгебра.

Определение 2.8. **Симметрическая разность** в булевой алгебре задается по формуле $a \triangle b := (a \vee b) \wedge \neg(a \wedge b)$.

Задача 2.35. а. Докажите, что симметрическая разность ассоциативна.

б. Докажите, что операция $\wedge$ дистрибутивна относительно симметрической разности.

в. Докажите, что $(A, \wedge, \triangle)$ это кольцо (роль сложения выполняется $\triangle$, роль умножения - $\wedge$).

г. Докажите, что все элементы полученного кольца суть идемпотенты.

Задача 2.36 (!). Дано коммутативное кольцо R над $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, все элементы которого суть идемпотенты. Рассмотрим структуру булевой алгебры на множестве идемпотентов, определенную в задаче 2.34. Докажите, что R получается вышеописанным способом из этой булевой алгебры.

Определение 2.9. **Идеалом** булевой алгебры называется замкнутое относительно операции $\vee$ подмножество $I \subset A$, которое удовлетворяет $a \wedge i \in I$ для любого $a \in A, i \in I$.

Задача 2.37. Дана булева алгебра A, у которой больше двух элементов. Докажите, что в A есть нетривиальный идеал.

Задача 2.38 (!). Пусть $(A, \wedge, \vee)$ булева алгебра, а $I \subset A$ идеал. Определим такое соотношение: $a \sim_I b$, если $a \triangle b \in I$. Докажите, что это соотношение эквивалентности. Докажите, что операции $\wedge$ и $\vee$ сохраняют классы эквивалентности, и индуцируют на множесте A' классов эквивалентности структуру булевой алгебры.

Определение 2.10. В этих условиях A' называется **факторалгеброй**, и обозначается A/I.