Теория Меры: Задачи для устного экзамена

Можно свободно пользоваться всеми задачами и теоремами из листков и лекций, но надо быть готовым предъявить доказательство для каждого утверждения.

Каждому студенту выдаются задачи на $k := 12 - 2N - N'$ баллов, где N – число сданных листков, а N' – число несданных листков, в которых сдана половина задач со звездочкой/факториалом или половина задач простых и с факториалом. Для получения оценки $l + 3$ необходимо набрать $k - 8 + 2l$ баллов.

Все топологические пространства в задачах предполагаются хаусдорфовыми.

1.1. Задачи к листку 1

Задача 1.1. Докажите, что существуют два полиэдра одного объема в $\mathbb{R}^4$, которые не равносоставлены.

Задача 1.2 (2 балла). **Полусфера** есть часть сферы $S^2 = \{x, y, z \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, конгруэнтная $\{(x, y, z) \in S^2 \mid x \geqslant 0\}$. **Двуугольник** на сфере S^2 есть пересечение двух полусфер. **Кольцо сферических многоугольников** на сфере есть кольцо, порожденное полусферами. **Треугольник** есть пересечение трех полусфер. Равносоставленность сферических многоугольников определяется так же, как и для плоских многоугольников. Верно ли, что любой сферический треугольник равносоставлен двуугольнику?

Задача 1.3 (2 балла). Пусть A есть n-угольник на сфере, α сумма его углов, а $\delta(A)$ есть $(n-2)\pi - \alpha$. Докажите, что $\delta(A)$ задает конечно-аддитивную меру на кольце сферических многоугольников.

Задача 1.4. Пусть μ – аддитивная, $O(3)$-инвариантная, неотрицательная мера на алгебре сферических многоугольников, причем такая, что некоторый двуугольник имеет конечную меру. Докажите, что граница полусферы имеет меру нуль. Докажите, что $\mu(S^2) < \infty$.

Задача 1.5. Рассмотрим кольцо R многоугольников в $\mathbb{R}^2$ (кольцо, порожденное замкнутыми треугольниками). Пусть на R задана функция λ со значениями в $[0, \infty[$, удовлетворяющая следующим свойствам

а. $\lambda(I) = 0$, где I это отрезок, интервал или полуинтервал

б. $\lambda(A) = \lambda(B)$, если A может быть получено из B параллельным переносом.

в. λ аддитивна: $\lambda(A \coprod B) = \lambda(A) + \lambda(B)$.

Докажите, что λ задается этими свойствами однозначно, с точностью до постоянного множителя.

Задача 1.6. Пусть H – гильбертово пространство, $\mathfrak{S}$ множество ограниченных, открытых подмножеств H, а $\mu : \mathfrak{S} \longrightarrow [0, \infty[$ – полуаддитивная, монотонная функция, инвариантная относительно сдвигов. Докажите, что $\mu = 0$.

1.2. Задачи к листку 2

Задача 1.7. Докажите, что множество измеримых подмножеств $\mathbb{R}$ имеет размерность больше континуума. Докажите, что множество борелевских подмножеств в $\mathbb{R}$ континуально.

Задача 1.8. Пусть M – локально компактное пространство, A_o - алгебра подмножеств, порожденная открытыми, A_c - алгебра подмножеств, порожденная компактами. Всегда ли A_o равно A_c?

Задача 1.9. Пусть f – монотонно неубывающая функция на $\mathbb{R}$. Докажите, что найдется мера μ_f такая, что $\mu_f(]a, b[) = \lim_{\varepsilon\to+0} f(b - \varepsilon) - f(a + \varepsilon)$.

Задача 1.10. Докажите, что каждая мера на такая, что $\nu([a, b]) < \infty$ для любых a, b, получается таким образом.

Задача 1.11 (2 балла). Множество Витали есть подмножество $Q \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $\mathbb{R}^n$ представляется в виде объединения счетного числа непересекающихся подмножеств $Q_0, Q_1, ..., Q_n, ...$ конгруэнтных Q, причем у каждой точки x есть набор окрестностей U_i таких, что $Q_i \cap U_i$ конгруэнтны для всех i. Докажите, что множество Витали существует, для любого n. Докажите, что оно неизмеримо.

Задача 1.12. Постройте гомеомофизм S^1 в себя, переводящий множество меры нуль в множество ненулевой меры.

1.3. Задачи к листку 3

Задача 1.13. Найдите последовательность непрерывных функций на $\mathbb{R}^n$, которая сходится в L^1, но не сходится равномерно. Найдите последовательность непрерывных функций на $\mathbb{R}^n$, которая сходится равномерно, но не сходится в L^1.

Задача 1.14. Найдите последовательность непрерывных функций на $[0, 1]$, которая сходится поточечно, но не сходится в L^1.

Определение 1.1. Измеримая функция на $\mathbb{R}^n$ есть такая, что прообраз борелевского измерим (по Лебегу). **Борелевская функция** есть такая, что прообраз борелевского множества борелевский.

Задача 1.15 (2 балла). Докажите, что множество измеримых функций на $\mathbb{R}$ имеет размерность больше континуума. Докажите, что множество борелевских функций на $\mathbb{R}$ континуально.

Задача 1.16. Докажите, что любая измеримая функция равна некоторой борелевской функции вне некоторого множества меры 0.

Задача 1.17. Докажите, что произведение измеримых функций измеримо. Пусть f – измеримая функция на $\mathbb{R}^n$ такая, что $\int_M fg = 0$ для любой непрерывной функции с компактным носителем. Докажите, что $f = 0$ почти всюду.

1.4. Задачи к листку 4

Задача 1.18. Пусть f – неотрицательная функция на на $\mathbb{R}^n$, а D_f – подмножество в $\mathbb{R}^{n+1}$, состоящее из точек $\{(x_1, ..., x_n, t) \ \mid \ 0 < t < f(x_1, ..., x_n)\}$. Докажите, что f интегрируема тогда и только тогда, когда D_f измеримо и имеет конечную меру.

Задача 1.19 (2 балла). Пусть ν – локально конечная мера на $\mathbb{R}^n$, μ – мера Лебега. Докажите, что $\nu \preccurlyeq \mu$ вне множества меры нуль.

Задача 1.20 (2 балла). Пусть f – монотонно неубывающая функция на $\mathbb{R}$. Докажите, что f дифференцируема вне множества меры 0.

Задача 1.21 (2 балла). Функция $\phi: \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ называется **выпуклой**, если множество $\{(x, y) \ \mid \ y \geqslant f(x)\}$ выпукло. Докажите, что любая выпуклая функция непрерывна, дифференцируема вне множества меры 0, и ее производная монотонна на ее множестве определения.

Задача 1.22. Докажите, что в $\mathbb{R}^n$ не существует измеримого множества A такого, что $\mu(A \cap B) = \frac{1}{2}\mu(B)$ для любого куба B (μ - мера Лебега).

Задача 1.23. Континуум-гипотеза утверждает, что на континууме C можно задать отношение полного порядка $\preccurlyeq$, такое, что каждый собственный отрезок C счетный. Предположим, что такое отношение полного порядка есть, и рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ подмножество $\{(x, y) \ \mid \ x \preccurlyeq y\}$. Докажите, что оно неизмеримо.

1.5. Задачи к листкам 5-6

Задача 1.24. Постройте подмножество меры 0 в $\mathbb{R}$, которое имеет хаусдорфову размерность 1.

Задача 1.25. Число $c \in \mathbb{R}$ называется **числом Лиувилля**, если для каждого $n > 0$ существует $p, q \in \mathbb{Z}$, такие, что $|c - p/q| < q^{-n}$. Докажите, что множество чисел Лиувилля имеет нулевую размерность Хаусдорфа.

Задача 1.26. Докажите, что каждое измеримое подмножество $\mathbb{R}^n$ положительной меры содержит несчетное компактное подмножество.

Задача 1.27 (2 балла). Множество Бернштейна есть подмножество $A \subset \mathbb{R}^n$ такое, что для любого несчетного компакта K, множества $A \cap K$ и $K \backslash A$ непусты. Докажите, что множества Бернштейна существуют. Докажите, что они неизмеримы.

Задача 1.28 (2 балла). Найдите локально компактную хаусдорфову топологическую группу, у которой правая мера Хаара не пропорциональна левой.

Задача 1.29. Пусть V есть n-мерное комплексное пространство с невырожденной эрмитовой метрикой с сигнатурой $(n, 1)$, а $B \subset \mathbb{P}V$ проективизация множества всех векторов с отрицательным квадратом. Докажите, что B гомеоморфно шару, и снабжено транзитивным действием группы $G = U(n, 1)$ унитарных эндоморфизмов пространства V. Постройте нетривиальную G-инвариантную меру на B.

Задача 1.30. Постройте транзитивное действие $U(n+1)$ на $\mathbb{C}P^n$. Постройте нетривиальную $U(n+1)$-инвариантную меру на $\mathbb{C}P^n$.

Задача 1.31. Постройте нетривиальную $O(n+1)$-инвариантную меру на n-мерной сфере со стандартным действием $O(n+1)$. Докажите, что такая мера единственна с точностью до константы.

Определение 1.2. Борелевской алгеброй называется алгебра подмножеств топологического пространства, порожденная компактами.

Задача 1.32 (2 балла). Пусть G – компактная группа, непрерывно действующая на топологическом пространстве M. Докажите, что на M существует нетривиальная G-инвариантная борелевская мера.