Теория Меры 3: Интегрирование

3.1. Измеримые функции

Определение 3.1. Пусть дано пространство M с заданной на нем σ-алгеброй $\mathfrak{U}$. Мы говорим, что подмножество M **измеримо**, если оно лежит в $\mathfrak{U}$.

Пусть – топологическое пространство. **Алгебра борелевских множеств** – это сигма-алгебра, порожденная открытыми подмножествами. Множество называется измеримым по Борелю, если оно лежит в этой алгебре, то есть получено счетными объединениями и пересечениями открытых и замкнутых множеств. **Борелевская мера** есть счетно-аддитивная мера на этой сигма-алгебре.

Пусть M_1, M_2 – пространства с заданными на них σ-алгебрами $\mathfrak{U}_1$ и $\mathfrak{U}_2$. Функция $f: M_1 \longrightarrow M_2$ называется **измеримой**, если прообраз каждого измеримого множества измерим, то есть

$$f^{-1}(U) \subset \mathfrak{U}_1,$$

для любого $U \subset \mathfrak{U}_2$.

Если M – пространство с сигма-алгеброй, а $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ вещественно значная функция, мы говорим, что f измерима, если прообраз измеримого по Борелю множества измерим.

Задача 3.1. Пусть M – пространство с борелевской мерой, а $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывная функция. Докажите, что f измерима.

Задача 3.2. Пусть M – пространство с заданной на нем σ-алгеброй $\mathfrak{U}$, а $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ произвольная функция. Докажите, что следующие свойства равносильны

а. $f^{-1}[a, b]$ измеримо для любого отрезка $[a, b]$

б. $f^{-1}]a, b[$ измеримо для любого интервала $]a, b[$

в. $f^{-1}]-\infty, b]$ измеримо для любого луча $]-\infty, b]$

г. Функция f измерима.

Задача 3.3 (*). Пусть $M = \mathbb{Z}_p$ – пространство целых p-адических чисел, а $\mathfrak{U}$ – алгебра открытозамкнутых подмножеств. Докажите, что любая непрерывная функция на M измерима относительно $\mathfrak{U}$.

Задача 3.4 (!). Пусть

$$f_1, f_2: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

некоторые функции на пространстве с сигма-алгеброй. Докажите, что эти функции измеримы тогда и только тогда, когда функция

$$f_1 \times f_2: M \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

измерима по отношению к борелевской сигма-алгебре на $\mathbb{R}^2$.

Задача 3.5. Докажите, что сумма и произведение измеримых функций $f_1, f_2: M \longrightarrow \mathbb{R}$ измеримо.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 3.6 (*). Докажите, что пространство измеримых функций на $\mathbb{R}$ по мощности больше континуума.

Определение 3.2. Функция $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ называется **ступенчатой**, если она принимает не более чем счетное количество разных значений

Замечание. Иногда при определении ступенчатой функции также требуют, чтобы все множества вида $f^{-1}(c)$ были измеримы.

Задача 3.7. а. Докажите, что ступенчатая функция измерима тогда и только тогда, когда $f^{-1}(a)$ измеримо для любого $a \in \mathbb{R}$.

б. [*] Приведите пример неизмеримой (и неступенчатой) функции, для которой это выполняется.

Определение 3.3. Пусть $f_i: M \longrightarrow \mathbb{R}$ – последовательность функций. Напомним, что f_i **равномерно сходится** к $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется N такой, что $|f - f_i| < \varepsilon$ при $i > N$.

Задача 3.8. Для функции $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$, обозначим за f_n функцию вида $x \mapsto \frac{1}{n}[nf(x)]$, где [...] обозначает целую часть. Докажите, что $\{f_n\}$ равномерно сходится к f.

Задача 3.9 (!). Дана измеримая функция $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$. Докажите, что f есть предел равномерно сходящейся последовательности ступенчатых измеримых функций

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 3.10. Пусть f – предел равномерно сходящейся последовательности измеримых функций. Докажите, что f измерима.

Указание. Докажите, что счетное объединение измеримых множеств измеримо. Представьте $f^{-1}(]-\infty, c[)$ как объединение прообразов вида $\bigcup f_i^{-1}(]-\infty, c-\varepsilon[)$, где $|f - f_i| < \varepsilon$.

Задача 3.11. Пусть $f_i: M \longrightarrow \mathbb{R}$ невозрастающая последовательность измеримых функций. Докажите, что предел $\lim f_i$ измерим (если он существует).

Указание. Докажите, что $f^{-1}(]-\infty, c[) = \cup f_i^{-1}(]-\infty, c[)$.

Задача 3.12. Убедитесь, что функция $x_1, x_2, ..., \mapsto \sup_i(x_i)$ из $]-\infty, c[^\infty$ в $]-\infty, c[$ непрерывна. Выведите из этого такое следствие. Пусть f_i счетный набор измеримых функций. Докажите, что функции $\sup_i\{f_i\}$ и $\inf_i\{f_i\}$ также измеримы (если они определены).

Указание. Докажите, что максимум и минимум конечного числа измеримых функций измерим. Затем напишите

$$\inf_i\{f_i\} = \lim_{j \longrightarrow \infty} \inf_{i<j}\{f_i\}$$

и воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 3.13 (!). Пусть f – предел поточечно сходящейся последовательности $\{f_i\}$ измеримых функций. Докажите, что f измерима.

Указание. Сведите задачу к случаю, когда f_i монотонно возрастает, с помощью

$$\lim f_i = \lim_{i \longrightarrow \infty} \sup_{j>i} \{f_j\}.$$

Определение 3.4. Пусть $f_i : M \longrightarrow \mathbb{R}$ последовательность измеримых функций на множестве с мерой. Мы говорим, что $\{f_i\}$ **сходится почти всюду** к f, еслу f_i поточечно сходится к f вне множества меры 0.

Задача 3.14 (!). Пусть $\{f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}\}$ – последовательность измеримых по Лебегу функций, которая сходится почти всюду к f. Докажите, что f измеримо.

Задача 3.15 (*). (Теорема Егорова) Пусть (M, μ) пространство, снабженное σ-алгеброй и мерой, а $\{f_i : M \longrightarrow \mathbb{R}\}$ последовательность измеримых функций, которая сходится почти всюду к f. Предположим, что $\mu(M) < \infty$. Докажите, что для любого ε найдется измеримое подмножество $E_\varepsilon \subset M$, $\mu(E_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, такое, что $\{f_i\}$ равномерно сходится вне E_ε к f.

3.2. Интегрируемые функции

Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ – ступенчатая функция, а $\{\alpha_i\}$ множество ее значении. Запишем f в виде $f = \sum \alpha_i \chi_{U_i}$, где $U_i := f^{-1}(\alpha_i)$, а χ_{U_i} характеристическая функция множества U_i.

Определение 3.5. Пусть M пространство, снабженное σ-алгеброй и мерой μ, а $f = \sum \alpha_i \chi_{U_i}$ ступенчатая измеримая функция. Функция f называется **ступенчатой интегрируемой**, если ряд $\sum |\alpha_i| \mu(U_i)$ сходится.[1]

Задача 3.16 (!). Докажите, что интегрируемые ступенчатые функции образуют линейное пространство

Определение 3.6. Пусть f – измеримая функция. Мы говорим, что f **равна нулю почти везде**, если $f = 0$ вне множества меры нуль. Мы говорим, что измеримые функции f и g **эквивалентны**, если $f - g$ равна нулю почти везде, В этом случае говорится, что f **равно** g **почти всюду.**

Замечание. В теории меры функции, эквивалентные почти всюду, отождествляются. В тех случаях, когда понятно, о чем речь, мы не будем специально оговаривать этого.

Задача 3.17 (!). Рассмотрим такую функцию на пространстве интегрируемых ступенчатых функций:

$$|f|_1 := \sum |\alpha_i| \mu(U_i).$$

Докажите, что эта функция – норма на пространстве классов эквивалентности ступенчатых интегрируемых функций.

[1] Если $\alpha_i = 0$, а $\mu(U_i) = \infty$, мы полагаем $|\alpha_i|\mu(U_i) = 0$: интеграл от фукции, тождественно равной нулю, нулевой.

Задача 3.18. Пусть f – измеримая функция на $\mathbb{R}$, а $\{f_i\}$ – последовательность измеримых функций, равномерно сходящихся к f. Всегда ли $\{f_i\}$ будет последовательностью Коши относительно метрики, заданной нормой $|\cdot|_1$?

Задача 3.19. Пусть f – измеримая функция на $\mathbb{R}$, а $\{f_i\}$ последовательность измеримых функций, такая, что $\{f_i\}$ последовательность Коши относительно $|\cdot|_1$, сходящаяся к f. Верно ли, что $\{f_i\}$ равномерно сходится к f?

Определение 3.7. Пусть f – функция на топологическом пространстве M. Мы говорим, что f – **функция с компактным носителем**, если $f = 0$ вне компактного подмножества M.

Задача 3.20 (!). Пусть f – измеримая функция с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$.

а. Рассмотрим последовательность ступенчатых функций $\{f_i\}$, определенную в Задаче 3.8. Докажите, что $\{f_i\}$ – это последовательность Коши относительно метрики, заданной нормой $|\cdot|_1$.

б. Пусть $\{f_i\}$ – последовательность интегрируемых ступенчатых функций с носителем в компактном множестве K, равномерно сходящаяся к f. Докажите, что $\{f_i\}$ это последовательность Коши относительно метрики, заданной нормой $|\cdot|_1$.

Задача 3.21 (*). Пусть M – пространство с σ-алгеброй, наделенное мерой μ такой, что $M = \bigcup U_i$, где $U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset ...$ – измеримые множества конечной меры. Пусть задана измеримая функция $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$. Докажите, что существует последовательность $\{g_i\}$ ступенчатых измеримых функций, которая равномерно сходится к f, причем $\{g_i\}$ это последовательность Коши относительно $|\cdot|_1$.

Указание. Пусть мера $U_i \backslash U_{i-1}$ равна a_i, а $\{f_i\}$ – последовательность, построенная из f как в Задаче 3.8. Положим g_k на $U_l \backslash U_{l-1}$ равным $f_{2^l[ka_l]+1}$. Докажите, что $\{g_i\}$ равномерно сходится к f, и $\lim |f - g_i|_1 = 0$.

Определение 3.8. Пусть последовательность Коши[2] интегрируемых измеримых ступенчатых функций равномерно сходится к функции f. Тогда f называется **интегрируемой функцией**. Пространство таких функций (определенных с точностью до равенства почти всюду) называется **пространством L_1-интегрируемых функций**, и обозначается $L_1(M)$.

Замечание. На протяжении этого листочка, "последовательность Коши" всегда означает последовательность Коши относительно L_1-метрики.

Задача 3.22. Пусть M пространство с мерой такое, что $\mu(M) < \infty$. Докажите, что любая измеримая ограниченная функция на M интегрируема.

Задача 3.23 (!). Пусть $\{f_i\}$, $\{g_i\}$ последовательности Коши ступенчатых функций, равномерно сходящихся к одной и той же функции h. Докажите, что $\lim \left| f_i\big|_A - g_i\big|_A \right|_1 = 0$ на каждом измеримом подмножестве $A \subset M$ конечной меры. Докажите, что h однозначно определяется классом эквивалентности $\{f_i\}$.

[2] Относительно L_1-метрики

Замечание. В этой ситуации мы говорим, что h есть предел последовательности f_i.

Определение 3.9. Пусть f – ступенчатая измеримая интегрируемая функция, $f = \sum \alpha_i \chi_{U_i}$. **Интеграл** f – это число

$$\int_M f\mu := \sum \alpha_i \mu(U_i).$$

Задача 3.24. Пусть $\{f_i\}$ – последовательность Коши интегрируемых ступенчатых функций. Докажите, что $\int_M f_i \mu$ сходится.

Определение 3.10. Пусть f – интегрируемая функция, полученная как предел последовательности Коши $\{f_i\}$. Определим **интеграл Лебега** f как

$$\int f\mu \ := \lim \int_M f_i \mu.$$

Задача 3.25. Докажите, что это определение корректно. Докажите, что интеграл задает непрерывный (в L_1-топологии) линейный функционал на пространстве интегрируемых функций.

Задача 3.26. Пусть $f: \ M \longrightarrow \mathbb{R}$ – неотрицательная интегрируемая функция. Докажите, что $\int f\mu \geqslant 0$, и равенство достигается только если $f = 0$ почти всюду.

Задача 3.27. Пусть f, g измеримые функции, причем $f \geqslant |g|$, а f интегрируема. Докажите, что g также интегрируема, и $\int f\mu \geqslant \int g\mu$.

Задача 3.28. Пусть $f: \ M \longrightarrow \mathbb{R}$ интегрируемая функция. Докажите, что $f\big|_{M'}$ интегрируема, для любого измеримого подмножества $M' \subset M$.

Задача 3.29 (!). Пусть $f: \ M \longrightarrow \mathbb{R}$ – произвольная функция. Докажите, что f интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируем $|f|$.

Определение 3.11. Пусть M – произвольное множество. σ-кольцо $\mathfrak{U} \subset 2^M$ на M есть кольцо подмножеств, замкнутое относительно счетных объединений. **Зарядом**, или **обобщенной мерой** на $\mathfrak{U}$ называется счетно-аддитивная (не обязательно положительная) функция $\mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Задача 3.30. Пусть σ – заряд на σ-кольце $\mathfrak{U} \subset 2^M$, а $E_i \in \mathfrak{U}$ – последовательность непересекающихся множеств. Докажите, что ряд $\sum \sigma(E_i)$ абсолютно сходится.

Задача 3.31 (*). (разложение Жордана) Определим $\sigma^+(E)$ как супремум $\sup_{F^+ \subset E} \sigma(F^+)$ по всем измеримым подмножествам $F^+ \subset E$, и $\sigma^-(E)$ как $-\inf_{F^- \subset E} \sigma'(F^-)$. Докажите, что σ^+, σ^- - это неотрицательные меры на $(M, \mathfrak{U})$, и $\sigma = \sigma^+ - \sigma^-$.

Задача 3.32 (*). (разложение Хана) В условиях предыдущей задачи, докажите, что

$$\sup_{F^+ \subset E} \sigma(F^+)$$

и

$$\inf_{F^- \subset E} \sigma'(F^-)$$

реализуются на подмножествах F^- и F^+. Более того, можно выбрать их таким образом, что $F^- \coprod F^+ = E$.