7. Теория меры, лекция 7: Внешняя мера

7.1. Борелевские меры и объем

7.1.1. Мера и объем

В предыдущих лекциях, мы строили сигма-аддитивную меру на борелевских множествах, исходя из уже заданной аддитивной меры на кольце многогранников, которое порождает сигма-алгебру борелевских множеств.

Есть немало геометрических ситуаций, когда никаких удобных подколец с аддитивной мерой нет. Чтобы ее построить, приходится явно задавать функцию "объема" на компактных подмножествах топологического пространства.

Типичным примером "объема" является асимптотический коэффициент, выражающий рост числа рациональных точек в заданном множестве при увеличении знаменателя. Пользуясь объемом, мы определяем "внешнюю меру" она же "мера Каратеодори" на борелевских множествах, а затем доказываем ее аддитивность.

Это довольно нетривиальная процедура, и при построении меры Лебега на векторном пространстве или на многообразии ее можно избежать. Если мы работаем с более общими локально компактными пространствами, без использования меры Каратеодори обойтись невозможно. Например, она нужна для построения меры Хаара на локально компактной топологической группе.

7.1.2. Внешняя мера

Все топологические пространства на протяжении этой лекции предполагаются хаусдорфовыми.

Определение 7.1. Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство. **Алгебра борелевских множеств** есть сигма-алгебра, порожденная компактными подмножествами M.

Определение 7.2. Пусть $\mathbf{C}$ – множество компактных подмножеств M. **Объем** есть функция $\lambda: \mathbf{C} \longrightarrow [0, \infty]$ которая удовлетворяет следующим условиям.

Монотонность: $\lambda(A) \leqslant \lambda(B)$ для $A \subset B$.

Аддитивность: $\lambda(A \coprod B) = \lambda(A) + \lambda(B)$, где $\coprod$ обозначает дизъюнктное объединение.

Полуаддитивность: $\lambda(A \cup B) \leqslant \lambda(A) + \lambda(B)$.

Пример 7.3: Пусть $\lambda(C)$ есть число целых точек в компактном подмножестве $C \subset \mathbb{R}^n$. Это объем.

Упражнение 7.4: Пусть M – метрическое пространство, а $N_\varepsilon(C)$ есть наименьшее число ε-шаров, которыми можно покрыть C. Рассмотрим какую-нибудь монотонно возрастающую функцию $\varphi(\varepsilon)$: $]0, \infty[\longrightarrow]0, \infty[$, где $\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(\varepsilon) = 0$. Докажите, что

$$\lambda(C) := \lim_{\varepsilon \to 0} \sup \frac{N_\varepsilon(C)}{\varphi(\varepsilon)}$$

задает объем.

Замечание 7.5. В последнем упражнении, нетривиальна только проверка аддитивности λ. Она легко выводится из соотношения

$$N_\varepsilon(A) + N_\varepsilon(B) = N_\varepsilon\left(A \coprod B\right),$$

которое верно, когда $d(A,B) > 2\varepsilon$ (см секцию 7.2).

Определение 7.6. Пусть на топологическом пространстве M задан объем λ. Определим **внутреннюю меру** открытого множества U как $\lambda_*(U) := \sup_{K\subset U}\lambda(K)$, где супремум берется по всем компактам в U. Определим **внешнюю меру** множества A как $\lambda^*(A) := \inf_{U\supset A}\lambda_*(U)$, где инфимум берется по всем открытым окрестностям A.

Лемма 7.7: Пусть λ есть мера Лебега на $\mathbb{R}^n$. Тогда $\lambda^*(K) = \lambda(K)$ для любого компакта $X \subset \mathbb{R}^n$.

Доказательство: Неравенство $\lambda^*(K) \geqslant \lambda(K)$ очевидно. Из хаусдорфовости легко получить, что $K = \bigcap_{U\supset K} U$ (проверьте это). Тогда $\lambda^*(K) = \lim_i \lambda(K_i)$, где $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset ...$ – последовательность окрестностей K, удовлетворяющих $\bigcap_i U_i = K$, а $K_i \subset U_i$ – подходящая последовательность компактных подмножеств. Заменив K_n на $K \cup \bigcap_{i=1}^n K_i$, можно считать, что каждый K_i содержит K и $\bigcap K_i = K$. Тогда $\lim_i \lambda(K_i) = \lambda(K)$ в силу σ-аддитивности меры Лебега. ■

Основной результат этой лекции есть теорема Каратеодори о продолжении внешней меры ("Caratheodory extension theorem"). Я докажу ее в конце этого раздела.

Теорема 7.8: (теорема Каратеодори о продолжении меры) Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство, а λ – объем, удовлетворяющий условиям определения 7.2. Тогда внешнюю меру λ^* можно продолжить до счетно-аддитивной меры на борелевских множествах.

Следующие две леммы нужны, чтобы доказать полуаддитивность внешней меры.

Лемма 7.9: Пусть M – хаусдорфово топологическое пространство, а A, B – непересекающиеся компактные множества. Тогда у A и B есть непересекающиеся открытые окрестности.

Доказательство. Шаг 1: Достаточно доказать, что у A есть окрестность, замыкание которой не пересекается с B (докажите это).

Шаг 2: Пусть $x \in B$. Для каждого $z \in A$, выберем окрестность $U_z \ni z$, замыкание которой $\overline{U_z}$ не содержит x (такая окрестность существует в силу хаусдорфовости — докажите). Поскольку A компактно, а U_z — открытое покрытие A, из него можно выбрать конечное подпокрытие $U_1, ..., U_n$. Замыкание множества $\bigcup U_i$ не содержит x, потому что

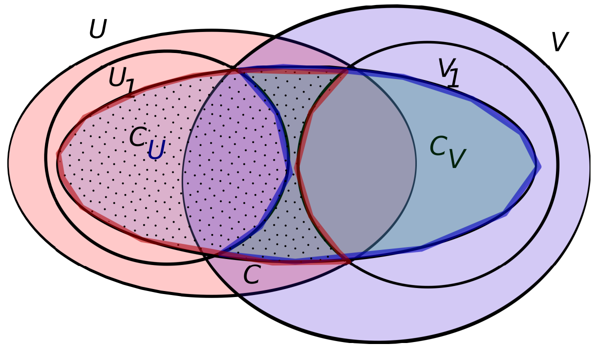
$$\overline{\bigcup_{i=1}^n U_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{U_i}. \tag{7.1.1}$$

Мы получили, что у A есть окрестность, замыкание которой не содержит $x \in B$.

Шаг 3: Из этого следует, что у любого $x \in B$ есть окрестность V_x, которая не пересекает открытую окрестность $U_x \supset A$. Множества V_x покрывают B; в силу компактности, можно выбрать конечное подпокрытие $\{V_i\}$. Обозначим соответствующие открытые окрестности A за U_i. Тогда $\bigcup V_i$ есть открытая окрестность B, которая не пересекает $\bigcap U_i$. ■

Лемма 7.10: Пусть $C \subset U \cup V$ компактное подмножество объединения двух открытых множеств. Тогда существуют компактные подмножества $C_U \subset U$ и $C_V \subset V$, такие, что $C_U \cup C_V = C$.

Доказательство: $C \backslash U$ и $C \backslash V$ – замкнутые подмножества компакта, значит, они компактны. Поскольку они не пересекаются, у них есть непересекающиеся окрестности, V_1 и U_1. Множества $C_U := C \backslash V_1$ и $C_V := C \backslash U_1$ также компактны и лежат в U и V, соответственно, их объединение дает все C, как видно из приведенной иллюстрации.



Разбиение компакта C в объединение компактов C_U и C_V.

■

Утверждение 7.11: Внешняя мера полуаддитивна: $\lambda^*(A \cup B) \leqslant \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$.

Доказательство. Шаг 1: Если $A = U, B = V$ – открытые множества, имеем $\lambda^*(U \cup V) = \sup_{C \subset U \cup V} \lambda(C) \leqslant \lambda(C_U) + \lambda(C_V)$, где C_U, C_V – компактные множества, построенные в предыдущей лемме. С другой стороны, $\lambda(C_U) \leqslant \lambda^*(U)$ и $\lambda(C_V) \leqslant \lambda^*(V)$ по определению внешней меры.

Шаг 2: Для произвольных A, B, и любого $\varepsilon > 0$, имеем $\lambda^*(A) + \lambda^*(B) \geqslant \lambda^*(U) + \lambda^*(V) - \varepsilon$ для подходящих окрестностей $U \supset A$ и $V \supset B$. Воспользовавшись предыдущим шагом, получаем

$$\lambda^*(A) + \lambda^*(B) \geqslant \lambda^*(U) + \lambda^*(V) - \varepsilon \geqslant \lambda^*(U \cup V) - \varepsilon \geqslant \lambda^*(A \cup B) - \varepsilon.$$

Поскольку ε произвольный, это дает $\lambda^*(A \cup B) \leqslant \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$. ■

Утверждение 7.12: Внешняя мера σ-полуаддитивна: $\lambda^*(\bigcup A_i) \leqslant \sum_{i=1}^\infty \lambda^*(A_i)$.

Доказательство. Шаг 1: Обозначим объединение $\bigcup A_i$ за A. Пусть все A_i открыты. Тогда $\lambda^*(A) = \sup_{K \subset A} \lambda(K)$, где супремум берется по всем компактам, содержащимся в A. Каждый такой компакт имеет конечное подпокрытие, $K \subset \bigcup_{i=1}^N A_i$, что дает $\lambda(K) \leqslant \lambda^*(K) \leqslant \sum_{i=1}^N \lambda^*(A_i)$ в силу полуаддитивности. Получаем:

$$\lambda^*(A) = \sup_{K \subset A} \lambda(K) \leqslant \sum_{i=1}^\infty \lambda^*(A_i).$$

Шаг 2: Для произвольных A_i, и любого $\varepsilon > 0$, имеем $\sum_{i=1}^\infty \lambda^*(A_i) \geqslant \sum_{i=1}^\infty \lambda^*(U_i) - \varepsilon$ для подходящих окрестностей $U_i \supset A_i$ (проверьте это). Воспользовавшись предыдущим шагом, получаем

$$\sum_{i=1}^\infty \lambda^*(A_i) \geqslant \sum_{i=1}^\infty \lambda^*(U_i) - \varepsilon \geqslant \lambda^*\left(\bigcup U_i\right) - \varepsilon \geqslant \lambda^*(A) - \varepsilon.$$

■

7.1.3. Измеримость по Каратеодори

Определение 7.13. Пусть M – топологическое пространство, λ – объем, а λ^* – соответствующая ему внешняя мера. Подмножество $A \subset M$ называется **измеримым по Каратеодори**, если для любого $X \subset M$, имеем $\lambda^*(X\backslash A) + \lambda^*(X \cap A) = \lambda^*(X)$.

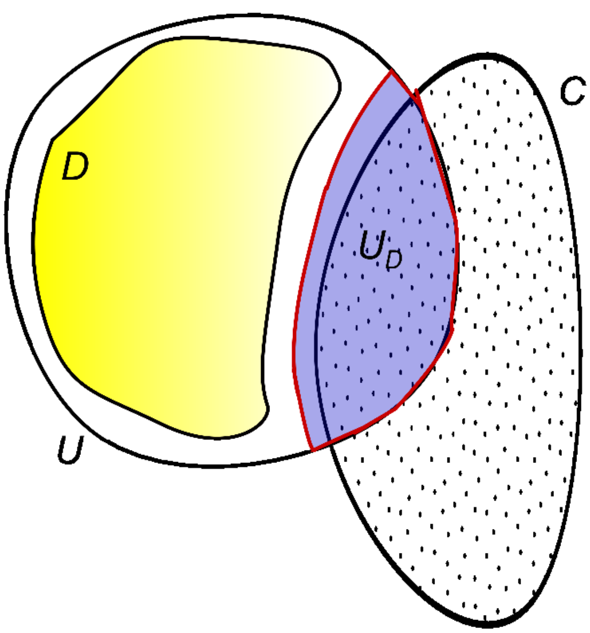
Замечание 7.14. Условие $\lambda^*(X\backslash A)+\lambda^*(X\cap A) = \lambda^*(X)$ достаточно проверять для открытых X. Действительно, пусть $U \supset X$ – открыто, и для всех таких U, имеем $\lambda^*(U\backslash A)+\lambda^*(U\cap A) = \lambda^*(U)$. Тогда

$$\lambda^*(X) = \inf_{U\supset X} \lambda^*(U) = \inf_{U\supset X} \left[\lambda^*(U\backslash A) + \lambda^*(U \cap A)\right] \geqslant \lambda^*(X\backslash A) + \lambda^*(X \cap A).$$

Это дает $\lambda^*(X\backslash A) + \lambda^*(X \cap A) \leqslant \lambda^*(X)$. Противоположное неравенство следует из полуаддитивности.

Утверждение 7.15: Любое компактное множество измеримо по Каратеодори.

Доказательство: Пусть C – компактное, а U открыто. В силу предыдущего замечания, достаточно проверить, что $\lambda^*(U\backslash C)+\lambda^*(U\cap C) = \lambda^*(U)$. Возьмем компактное подмножество $D \subset U\backslash C$, и пусть $V_D \supset C$ – открытая окрестность, замыкание которой не пересекает D (она существует в силу Леммы 7.9).



Вычисление $\lambda^*(U\backslash C) + \lambda^*(U \cap C)$, где C – компакт, U – открытое множество.

Тогда

$$\lambda^*(U \cap C) \leqslant \lambda^*(U \cap V_D) = \sup_{E\subset U\cap V_D} \lambda(E),$$

где E – компакт, лежащий в $U_D := U \cap V_D$. Это дает

$$\lambda^*(U \cap C) + \lambda^*(U\backslash C) \leqslant \sup_{D\subset U\backslash C} \lambda(D) + \sup_{E\subset U_D} \lambda(E). \tag{7.1.2}$$

Поскольку E и D – непересекающиеся компакты, лежащие в U, имеем

$$\lambda(D) + \lambda(E) = \lambda(E \cup D) \leqslant \lambda^*(U).$$

Вместе с (7.1.2), это дает $\lambda^*(U \cap C) + \lambda^*(U \backslash C) \leqslant \lambda^*(U)$. Обратное неравенство следует из полуаддитивности. ■

Утверждение 7.16: Пересечение, объединение, дополнение множеств, измеримых по Каратеодори, снова измеримо по Каратеодори.

Доказательство: Для дополнения $A_1 := M \backslash A$ это особенно очевидно, потому что $X \backslash A = X \cap A_1$, а $X \cap A = X \backslash A_1$. Чтобы доказать, что $A \cap B$ измеримо, отметим, что

$$X = \Big((X\backslash A)\backslash B\Big) \coprod \Big((X\backslash A) \cap B\Big) \coprod \Big((X \cap A)\backslash B\Big) \coprod \Big((X \cap A) \cap B\Big)$$

и в силу измеримости A и B это дает

$$\lambda^*(X) = \lambda^*((X\backslash A)\backslash B) + \lambda^*((X\backslash A) \cap B) + \lambda^*((X \cap A)\backslash B) + \lambda^*((X \cap A) \cap B). \tag{7.1.3}$$

Поскольку $X\backslash(A\cap B) = \Big((X\backslash A)\backslash B\Big) \coprod \Big((X\backslash A)\cap B\Big) \coprod \Big((X\cap A)\backslash B\Big)$, из полуаддитивности следует

$$\lambda^*(X\backslash(A \cap B)) \leqslant \lambda^*((X\backslash A)\backslash B) + \lambda^*((X\backslash A) \cap B) + \lambda^*((X \cap A)\backslash B).$$

Сравнивая это с (7.1.3), получаем

$$\begin{aligned}\lambda^*(X) &= \lambda^*(X\backslash(A \cap B)) + \lambda^*((X\backslash A) \cap B) + \lambda^*((X \cap A)\backslash B) + \lambda^*((X \cap A) \cap B) \\ &\geqslant \lambda^*(X\backslash(A \cap B)) + \lambda^*(X \cap (A \cap B)).\end{aligned}$$

Противоположное неравенство следует из полуаддитивности внешей меры. Доказательство для $A \cup B$ аналогично. ■

Мы получили, что измеримые по Каратеодори множества образуют алгебру. Оказывается, они также образуют σ-алгебру.

Утверждение 7.17: Счетное объединение множеств, измеримых по Каратеодори, снова измеримо по Каратеодори.

Доказательство: Пусть $\{A_i, i = 1, 2, 3, ...\}$ – счетный набор множеств, измеримых по Каратеодори. Заменив каждый A_i на дополнение ко всем предыдущим, можно с самого начала считать, что они попарно не пересекаются.

Рассмотрим любое множество X, и пусть U – окрестность $A \cap X$, где $A := \bigcup A_i$ Рассмотрим набор окрестностей $U_i \supset A_i \cap X$, содержащихся в U. Для любого компакта $K \subset A \cap X$, K содержится в конечном объединении U_i, что дает

$$\lambda^*(A \cap X) \geqslant \lim_N \lambda^* \left(\bigcup_{i=0}^N U_i\right) \geqslant \lim_N \lambda^* \left(\bigcup_{i=0}^N A_i \cap X\right) = \lim_N \sum_{i=1}^N \lambda^*(A_i \cap X)$$

(последнее равенство вытекает из измеримости A_i). Из этого следует $\lambda^*(A \cap X) \geqslant \sum_{i=1}^\infty \lambda^*(A_i \cap X)$; противоположное неравенство вытекает из σ-аддитивности внешней меры. Мы получили, что для любого счетного набора попарно непересекающихся множеств, измеримых по Каратеодори, имеет место равенство

$$\lambda^*\left(\left(\coprod A_i\right)\cap X\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^*(A_i\cap X). \tag{7.1.4}$$

Это дает

$$\lambda^*(A\cap X)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^*(A_i\cap X)=\lambda^*(X)-\lim_N\lambda^*\left(X\backslash\left(\coprod_{i=1}^{N}A_i\right)\right)\leqslant\lambda^*(X)-\lambda^*(X\backslash A)$$

(последнее неравенство следует из монотонности внешней меры). Получаем $\lambda^*(A\cap X)+\lambda^*(X\backslash A)\leqslant\lambda^*(X)$; противоположное неравенство следует из полуаддитивности, что дает $\lambda^*(A\cap X)+\lambda^*(X\backslash A)=\lambda^*(X)$. ■

В силу двух предыдущих утверждений, измеримые по Каратеодори множества образуют сигма-алгебру. Поскольку компакты измеримы, эта сигма-алгебра содержит сигма-алгебру борелевских множеств. Поэтому теорема Каратеодори о продолжении (теорема 7.8) немедленно вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 7.18: Рассмотрим внешнюю меру λ^* как функцию на сигма-алгебре множеств, измеримых по Каратеодори. Тогда λ^* аддитивна и σ-аддитивна.

Доказательство: Аддитивность λ^* следует непосредственно из определения измеримости по Каратеодори (проверьте это). σ-аддитивность есть следствие (7.1.4). ■

7.2. Мера Хаусдорфа

Пусть M – метрическое пространство. Напомню, что **открытый шар радиуса** r **с центром в** x есть множество

$$B_r(x):=\{y\in M \ \ | \ \ d(x,y)<r\}.$$

Для любого подмножества $A\subset M$, определим число $\mu_{d,\varepsilon}(A)$ формулой

$$\mu_{d,\varepsilon}(A):=\inf_{U_i}\sum_i r(U_i)^d,$$

где инфимум берется по всем покрытиям A шарами U_i радиуса $<\varepsilon$, а $r(U_i)$ – радиус шара.

Легко видеть, что $\mu_{d,\varepsilon}$ монотонно невозрастает как функция ε, значит, предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_{d,\varepsilon}(A)\in[0,\infty]$$

хорошо определен.

Определение 7.19. Пусть A компактно. d**-мерная мера Хаусдорфа** A есть

$$\mu_d(A):=\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_{d,\varepsilon}(A)$$

Утверждение 7.20: $\mu_d(A)$ удовлетворяет условиям из определения 7.2, то есть является объемом.

Доказательство: Монотонность и полуаддитивность очевидны из определения, и только аддитивность нуждается в проверке. Пусть $A, B \subset M$ – непересекающиеся компакты. Метрика задает непрерывную функцию $d: A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ на произведении двух компактов, которое тоже компактно. Следовательно, $d: A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ достигает минимума, который обозначается $d(A,B)$; это число называется **расстоянием между** A **и** B Поскольку $A \cap B = \emptyset$, расстояние $d(A,B)$ положительно. Для каждого $\varepsilon < \frac{1}{2}d(A,B)$, никакой ε-шар не может пересекать A и B (проверьте это). Значит,

$$\mu_{d,\varepsilon}(A \cup B) = \mu_{d,\varepsilon}(A) + \mu_{d,\varepsilon}(B).$$

Это доказывает аддитивность μ_d. ■

Замечание 7.21. По теореме Каратеодори, с объемом $\mu_d(A)$ связана счетно-аддитивная мера на борелевских множествах. Эта мера тоже называется d**-мерной мерой Хаусдорфа.**

Замечание 7.22. Пусть $d \leqslant d'$, а $\{U_i\}$ – такое покрытие A шарами радиуса $< \varepsilon$, которе удовлетворяет $\mu_{d',\varepsilon}(A) \geqslant \sum_i r(U_i)^{d'} - \delta$, для заданного $\delta > 0$. Тогда

$$\mu_{d,\varepsilon}(A) \geqslant \sum_i r(U_i)^d - \delta = \sum_i r(U_i)^{d'} r(U_i)^{d-d'} - \delta \geqslant \sum_i r(U_i)^{d'} \varepsilon^{d-d'} - \delta \geqslant \varepsilon^{d-d'} \mu_{d',\varepsilon}(A) - \delta$$

потому что все $r(U_i) < \varepsilon$, что дает $r(U_i)^{d-d'} > \varepsilon^{d-d'}$. В силу произвольности выбора δ, получаем $\mu_{d,\varepsilon}(A) \geqslant \varepsilon^{d-d'} \mu_{d',\varepsilon}(A)$ для любого $d < d'$.

Переходя к пределу, получаем такое утверждение (проверьте).

Утверждение 7.23: Для любого $d < d'$, и любого $\varepsilon > 0$, имеем $\mu_d(A) \geqslant \varepsilon^{d-d'} \mu_{d'}(A)$ ■

Следовательно, $\mu_d(A)$ есть невозрастающая функция d, принимающая значения ∞ либо 0 всюду, кроме, возможно, одной точки (проверьте это).

Определение 7.24. Размерность Хаусдорфа $\dim_h(A)$ определяется формулой $\dim_h(A) := \inf\{d \in [0,\infty] \ \ |\mu_d(A) = 0\}$

Замечание 7.25. Размерность Хаусдорфа часто бывает дробная, особенно на различных фрактальных множествах.

7.3. Константин Каратеодори

Каратеодори родился в Берлине в 1873-м году. Его отец Степанос Каратеодори был турецким дипломатическим атташе в Германии. Вскоре после рождения ребенка, Степанос Каратеодори был назначен послом в Бельгии и переехал в Брюссель.

Константин Каратеодори происходил из знаменитой семьи османских врачей и дипломатов, греков по национальности. Его двоюродный дедушка Александр Каратеодори Паша был министром иностранных дел Османской Империи, и представлял турков на Берлинском Конгрессе в 1878-м году, на котором Турция получила назад почти все земли, потерянные в результате неудачных боевых действий.

Дед Константина Каратеодори, тоже Константин, был знаменитым турецким врачом и гинекологом. Он преподавал в имперской медицинской школе и написал книгу о борьбе с чумой. Также

Constantin Carathéodory
(September 13, 1873 – February 2, 1950)

он прославился тем, что удалил у пациента, страдавшего мочекаменной болезнью, камень весом в полтора килограмма; пациент выжил.

Константин Каратеодори вырос и получил образование в Брюсселе. Он в совершенстве знал несколько европейских языков, древнегреческий и латынь, и дважды получал первое место на всебельгийской математической олимпиаде.

Во время нередких визитов в Грецию, Каратеодори подружился с Элефтериосом Венизелосом (1864-1936), знаменитым революционером и архитектором современного греческого государства.

Во время греко-турецкой войны 1897-го года, Каратеодори поддержал греков, что поставило его отца, чиновника турецкого правительства, в неудобное положение. В результате Каратеодори получил работу инженера британской колониальной службы; он провел несколько лет в Египте, изучая пирамиду Хеопса, и написал книгу по египтоведению. В 1900-м году Каратеодори поступил в берлинский университет, где слушал лекции Фробениуса и Германна Шварца, прославленного неравенством Коши-Шварца (оно же Коши-Буняковского) и леммой Шварца из комплексного анализа.

В скором времени Каратеодори перебрался в Геттинген, где он защитил диссертацию о вариационном исчислении под руководством Минковского. Проведя непродолжительное время в университетах Бонна, Ганновера и Силезии, он вернулся в Геттинген, в 1913-м году, и стал профессором, заняв освободившуюся позицию Феликса Клейна.

В соответствии с традициями его семьи, практиковавшей близкородственные браки, Каратеодори женился на своей тетке Ефросинье, которая была младше его на 12 лет.

В первую мировую войну Каратеодори жил в Германии и не воевал, будучи греком по национальности (Греция воевала на стороне Антанты). После войны он вернулся в Грецию, по просьбе Элефтериоса Венизелоса, который планировал основать новые университеты в Смирне и Салониках, под руководством Каратеодори.

Каратеодори был официально назначен ректором университета в Смирне, но планы Венизелоса не увенчались успехом. Вскоре после подписания мира с турками (на чрезвычайно выгодных для Греции условиях),[1] греческий король Александр, сторонник либерализма, был укушен обезьянами, и 25 октября умер от заражения крови. После этого были объявлены выборы, на которых партия Венизелоса потерпела сокрушительное поражение. Венизелос стал жертвой покушения со стороны противников либерализма, едва выжил, удалился от дел и эмигрировал, поселившись в Париже. К власти пришла партия анти-венизелистов, которые уволили половину генералов, за-

[1] Севрский мирный договор, 10 августа 1920.

подозрив в них симпатии к Венизелосу, и продолжили войну с Турцией, в надежде захватить еще больше территории. Севрское соглашение так и не было ратифицировано, ни Турцией (где как раз случилась кемалистская революция), ни Грецией.

Уинстон Черчиль сказал по поводу смерти короля Александра "обезьяний укус, который убил 250,000 человек". Результатом военной кампании анти-везелистов стал полный разгром Греции и потеря всех приобретенных по условиям соглашения в Севре территорий. Среди прочего, турки захватили Смирну, сожгли город и выселили оттуда всех греков. Каратеодори, героически возглавивший эвакуацию университета, какое-то время оставался профессором в Афинах, а в 1924-м году перебрался в Мюнхен на кафедру, освободившуюся от Линдеманна (ученика Клейна, доказавшего трансцендентность π). Там он профессорствовал до самой смерти в 1950-м году.

После возвращения к власти либеральной партии под руководством Венизелоса в 1928-м году, Каратеодори много занимался развитием греческой науки. Он основал университет в Салониках, активно участвовал в реформах афинского университета, и опубликовал работу о геометрии греческого Парфенона.

Constantin Carathéodory (фотография Конрада Якобса, 1932, Эрланген)

Каратеодори больше всего знаменит своими работами по теории меры и термодинамике. Он был первым, кто придумал строить теорию меры с алгебраической точки зрения, на произвольной булевой алгебре. Каратеодори изобрел аксиоматическое построение термодинамики, повсеместно используемое до сих пор. Кроме того, Каратеодори первым стал изучать субримановы метрики, весьма важные в контактной геометрии и теории управления (их также называют метрики Карно-Каратеодори). Также Каратеодори занимался оптикой и астрономией, и опубликовал работы об оптимальной конструкции телескопа.

Каратеодори оказал большое влияние на Эйнштейна, который много благодарил Каратеодори за помощь в разработке Общей Теории Относительности.