6. Теория меры, лекция 6: Теорема Фубини

Пусть f – неотрицательная, функция на $\mathbb{R}^n$, а Z – сегмент в $\mathbb{R}^{n+1}$, ограниченный $x_{n+1} = 0$ и ее графиком, который представлен как отображение из оси плоскости $x_{n+1} = 0$ в прямую x_{n+1}. Теорема Фубини утверждает, среди прочего, что мера $\mu(Z)$ участка под графиком f равна ее интегралу, если f интегрируема.

Это утверждение интуитивно очевидно, и часто используется в качестве определения интеграла. Доказательство этого утверждения легко следует из единственности интеграла: достаточно проверить свойства 1-4 из предыдущей лекции, и убедиться, что сегмент под графиком измеримой функции измерим, что следует из приближения измеримой функции ступенчатыми.

Что занятно - из этого утверждения и полноты алгебры измеримых множеств следует полнота пространства $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Самая общая форма теоремы Фубини есть утверждение о проекции измеримых множеств, и она гораздо менее тривиальна. Она говорит, в частности, что для любого измеримого подмножества $Z \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ почти все слои проекции на $\mathbb{R}^m$ измеримы, чти задает функцию на $\mathbb{R}^m$, определенную почти всюду, и равную объему слоя проекции. По теореме Фубини, интеграл от этой функции равен объему Z.

Чтобы доказать такую теорему, мы изучаем множество всех мер на данной сигма-алгебре, и выясняем, какие из мер имеют вид $f\mu$, где f есть неотрицательная функция, интегрируемая относительно μ. Ответ на этот вопрос дает теорема Радона-Никодима (см. раздел 6.2). Интересно, что в доказательстве этой теоремы приходится использовать заряды, то есть σ-аддитивные функции на σ-алгебре, принимающие положительные и отрицательные значения.

6.1. Разложение Хана

6.1.1. Заряд и разложение Хана

Определение 6.1. Зарядом (signed measure) называется счетно-аддитивная функция на σ-алгебре, принимающая значения в $]-\infty, \infty]$ или $[-\infty, \infty[$.

Определение 6.2. Пусть σ – заряд на сигма-алгебре $\mathfrak{A}$ подмножеств M, а $Z \in \mathfrak{A}$ – какое-то подмножество. Обозначим за $\sigma\big|_Z$ **ограничение заряда на** Z, то есть σ-аддитивную функцию, которая делает из $X \in \mathfrak{A}$ число $\sigma(X \cap Z)$.

Определение 6.3. Заряд σ называется **положительным**, если $\sigma(X) \geqslant 0$ для любого X, и **отрицательным**, если $-\sigma$ положительный. **Разложение Хана** для заряда σ есть представление M в виде дизъюнктной суммы $M = A \coprod B$, где $\sigma\big|_A$ положительный, а $\sigma\big|_B$ отрицательный. Заряд называется **ограниченным**. если существует константа C такая, что $\sigma(X) \leqslant C$ для любого X.

Теорема 6.4: Пусть $\mathfrak{A}$ – сигма-алгебра подмножеств M, а σ – ограниченный заряд на $\mathfrak{A}$.[1] Тогда для σ существует разложение Хана.

Доказательство. Пусть $C := \sup_{X \subset M} \sigma(X)$.

[1] Ограниченность заряда на самом деле не нужна. В качестве упражнения, постройте разложение Хана, не пользуясь ограниченностью σ.

Шаг 1: Если $\sigma(Z) \geqslant C - \varepsilon$, то для любого $V \subset M \backslash Z$, имеем $\sigma(V) \leqslant \varepsilon$. Действительно, в противном случае мы бы имели $\sigma(V \coprod Z) = \sigma(V) + \sigma(Z) > C - \varepsilon + \varepsilon$. Аналогично, для любого $V \subset Z$, получаем $\sigma(V) \geqslant -\varepsilon$.

Шаг 2: Пусть $\sigma(Z_1), \sigma(Z_2) \geqslant C - \varepsilon$. Поскольку $Z_1 \backslash Z_2$ лежит в $M \backslash Z_2$, в силу предыдущего шага имеем $-\varepsilon \leqslant \sigma(Z_1 \backslash Z_2) \leqslant \varepsilon$. Применяя тот же аргумент к $\sigma(Z_2 \backslash Z_1)$ и складывая, получаем $-2\varepsilon \leqslant \sigma(Z_1 \triangle Z_2) \leqslant 2\varepsilon$. Для каждого подмножества $X \subset Z_1 \triangle Z_2$, верно то же самое: $-2\varepsilon \leqslant \sigma(X) \leqslant 2\varepsilon$.

Шаг 3: Если $|\sigma(X)| < \varepsilon$ для каждого $X \subset Z$, мы будем писать $|\sigma|(Z) < \varepsilon$. Утверждение шага 2 в этих обозначениях записывается $|\sigma|(Z_1 \triangle Z_2) \leqslant 2\varepsilon$. Отметим, что $|\sigma(X) - \sigma(Y)| < 2\varepsilon$, если $|\sigma|(X \triangle Y) < \varepsilon$. Действительно,

$$\sigma(X) - \sigma(Y) = \sigma(X \backslash Y) - \sigma(Y \backslash X),$$

но $|\sigma(Y \backslash X)| < \varepsilon$ и $|\sigma(X \backslash Y)| < \varepsilon$, потому что $|\sigma|(X \triangle Y) < \varepsilon$.

Шаг 4: Пусть $\{Z_i\}$ – последовательность множеств из $\mathfrak{A}$, $Y_n = \bigcap_{i \geqslant n} Z_i$, и для каждого i, верно $|\sigma|(Z_i \triangle Z_{i+1}) < \varepsilon_i$. Тогда для любого n, имеем $|\sigma|(Y_n \triangle Z_n) < \sum_{i=n}^{\infty} \varepsilon_i$. Это следует из того, что

$$Z_n \triangle Y_n \subset \bigcup_{i \geqslant n} Z_i \triangle Z_{i+1},$$

(проверьте это), а значит, любой $X \subset Y_n \triangle Z_n$ получен дизъюнктным объединением подмножеств $X_i \subset Z_i \triangle Z_{i+1}$, для каждого из которых верно $-\varepsilon_i \leqslant \sigma(X_i) \leqslant \varepsilon_i$. То же самое верно и для последовательности $Y'_n = \bigcup_{i \geqslant n} Z_i$ (проверьте).

Шаг 5: Выберем последовательность $\{Z_i\} \subset \mathfrak{A}$ таким образом, что $\sigma(Z_i) > C - \frac{1}{2^i}$. Из шага 2, получаем $|\sigma|(Z_i \triangle Z_{i+1}) < \frac{1}{2^{i-1}}$.

Применяя шаг 4, получаем, что $|\sigma|(Z_n \triangle Y_n) < \frac{1}{2^{i-2}}$. для любого $X \subset Z_n \triangle Y_n$. В силу шага 3, монотонная последовательность $Y_1 \subset Y_2 \subset Y_3 \subset ...$ удовлетворяет $|\sigma(Y_i) - \sigma(Z_i)| < \frac{1}{2^{i-3}}$. Снова применяя шаг 3, получим $\sigma(Y_i) \geqslant C - \frac{1}{2^{i-4}}$.

Шаг 6: Применяя шаг 2, получим $|\sigma|(Y_i \triangle Y_{i+1}) < \frac{1}{2^{i-5}}$.

Шаг 7: Пусть $Y = \bigcap_i Y_i$. Применяя аргумент из шага 4, и пользуясь утверждением шага 6, получаем

$$|\sigma|(Y \triangle Y_n) \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^{i-6}} \leqslant \frac{1}{2^{n-7}}.$$

Опять применив шаг 3, получим $\sigma(Y) = \lim \sigma(Y_i) = C$.

Шаг 8: Положим $A := Y$. Для каждого подмножества $Z \subset A$, $\sigma(Z) \geqslant 0$, потому что иначе мы бы имели $\sigma(A \backslash Z) > \sigma(A) = C$. Аналогично, для каждого $Z \subset M \backslash A$, $\sigma(Z) \leqslant 0$. Поэтому $M = A \coprod (M \backslash A)$ есть разложение Хана. ■

Определение 6.5. Пусть σ – заряд на σ-алгебре $\mathfrak{A}$. Назовем множество $Z \in \mathfrak{A}$ **σ-пренебрежимым**, если $\sigma(Z') = 0$ для любого $Z' \subset Z$.

Замечание 6.6. Разложение Хана определено однозначно с точностью до σ-пренебрежимого множества (докажите это).

6.1.2. Ганс Хан

Ганс Хан происходит из Вены; он защитил диссертацию в 1902-м году, под руководством Густава фон Эшериха, который был также руководителем Радона (теория меры), Титце ("лемма Титце", известная в топологии), Виеториса (последовательность Маера-Виеториса) и Виртингера ("неравенство Виртингера"). Вплоть до войны Хан профессорствовал в городе Черновиц, ныне Черновцы.

Хан воевал, был ранен на итальянском фронте; после войны он стал профессором в Бонне, а потом в Вене. В Вене Хан много занимался философией. Он был основателем "венского кружка" ("Общество Эрнста Маха") логических позитивистов, и до сих пор знаменит в этом качестве среди поклонников логического позитивизма.

Хан был социалистом, весьма сильных убеждений; однажды он задержал среди улицы извозчика, который жестоко обращался со своей лошадью, и отволок его в полицейский участок. Также Хан научно изучал парапсихологию, и читал лекции о природе спиритизма.

Hans Hahn
(September 27, 1879 - July 24, 1934)

Студентами Хана был Витольд Гуревич, прославленный гомоморфизмом Гуревича, Курт Гедель, также участник "Общества Эрнста Маха", и Карл Поппер, ставший философом.

6.2. Теорема Радона-Никодима

Определение 6.7. Пусть S - пространство с сигма-алгеброй, а μ и ν две меры. Мы говорим, что ν **абсолютно непрерывна** относительно μ (обозначается $\nu \ll \mu$) если для любого измеримого множества A, из $\mu(A) = 0$ следует $\nu(A) = 0$.

Определение 6.8. Непрерывная мера на пространстве с мерой Лебега есть мера, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега.

Пример 6.9: Пусть $x \in [0, 1]$ – точка на отрезке, а μ_x – мера, такая, что $\mu_x(A) = 0$, если $A \not\ni x$, и $\mu_x(A) = 1$, если $A \ni x$. Легко видеть, что такая мера не непрерывна.

Пример 6.10: Пусть f – измеримая, неотрицательная функция на пространстве M с сигма-алгеброй, а μ – мера на M. Обозначим за $f\mu$ меру, которая делает из измеримого множества $A \subset M$ интеграл $\int_\mu f\Big|_A$. Проверьте, что это действительно мера. Проверьте, что $f\mu \ll \mu$.

Замечание 6.11. Интеграл функции по множеству $A \subset M$ часто обозначается $\int_A f\mu$. Это обозначение весьма удобно. Смысл его в том, что $f\mu$ – это заряд на M, а $\int_A \sigma$ обозначает $\sigma(A)$, для заряда $\sigma = f\mu$.

Теорема 6.12: (теорема Радона-Никодима) Пусть M – пространство с сигма-алгеброй, а $\nu \ll \mu$ – меры на M, причем $\mu(M), \nu(M) < \infty$. Тогда $\nu = f\mu$ для какой-то функции f на M, интегрируемой относительно μ.

Доказательство: Пусть $x \in \mathbb{R}$. Легко видеть, что $\nu - x\mu$ есть ограниченный заряд. Обозначим за $A(\nu - \mu)$ максимальное множество, где заряд $\nu - x\mu$ положительный, полученное из разложения Хана. Для отрезка $[x, y] \subset \mathbb{R}$, обозначим за $A_{[x,y]}$ множество $A(\nu - x\mu)\backslash A(\nu - y\mu)$.

Расмотрим ступенчатую функцию

$$\Psi_n(\nu) := \sum_{i \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}} \frac{i}{n}\Bigg|_{A_{\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]}}.$$

Эта функция равна $\frac{i}{n}$ на каждом множестве вида $A_{\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]}$.

Легко видеть, что $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} A_{\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]}$ равно M, с точностью до множества меры нуль. В самом деле, дополнение B к этому множеству лежит в $\bigcup_{n \in Z} A_{[n,\infty]}$ (проверьте это), а значит, удовлетворяет $\nu(B) > C\mu(B)$ для любого $C \in \mathbb{Z}$. Мы получаем, что $\mu(B)$ равно нулю, и $\nu(B) = 0$ по абсолютной непрерывности.

На каждом из $A_{\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]}$, имеем $\frac{i}{n}\mu \leqslant \nu \leqslant \frac{i+1}{n}\mu$, значит,

$$0 \leqslant \nu - \Psi_n\mu \leqslant \frac{1}{n}\mu.$$

Поэтому Ψ_n – последовательность Коши в L^1-топологии, заданной μ, и ее предел удовлетворяет $\nu - \lim \Psi_n\mu = 0$. ■

Замечание 6.13. В прошлой лекции, мы получали измеримую функцию как равномерный предел ступенчатых, $f = \lim_n \Psi_n(f)$. Если f есть измеримая функция, $\nu = f\mu$, то $\Psi_n(\nu)$ есть функция $\Psi_n(f)$ (проверьте это). Доказательство теоремы Радона-Никодима следует той же логике, что и построение интеграла: мы приближаем меру ν последовательностью мер вида $f_n\mu$, таким образом, чтобы последовательность f_n сходилась в топологии L^1.

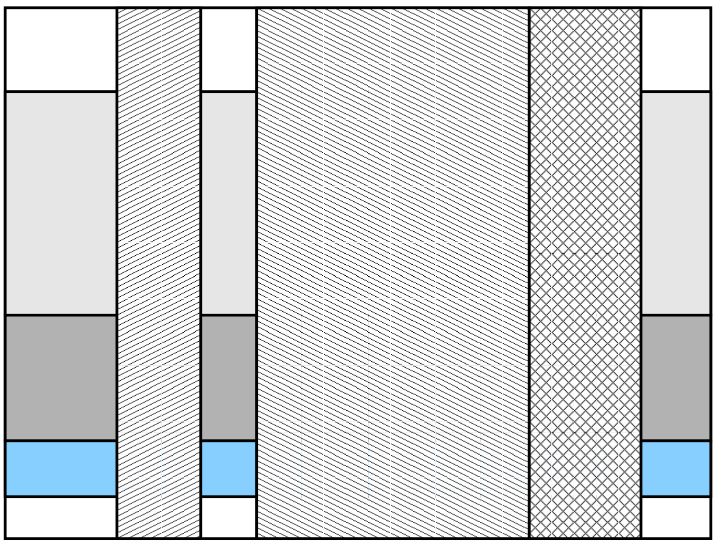
6.3. Теорема Фубини

6.3.1. Цилиндрические множества и произведение мер

Определение 6.14. Пусть $W = M \times N$ – произведение множеств, снабженных сигма-алгебрами A_M и A_N. Определим **цилиндрическое множество** как множество вида $X \times Y$, где $X \in A_M$ и $Y \in A_N$ – подмножества M и N, лежащие в σ-алгебре. **Алгебра цилиндрических множеств** есть кольцо множеств, порожденное конечными объединениями цилиндрических. **Произведение сигма-алгебр** есть сигма-алгебра подмножеств $M \times N$, порожденная цилиндрическими множествами.

Утверждение 6.15: Пусть μ, ν – аддитивные меры на A_M и A_N, $\mu(M), \nu(N) < \infty$. Рассмотрим функцию ξ на множестве цилиндрических подмножеств $M \times N$, определенную формулой $\xi(X \times Y) = \xi(X) \times \xi(Y)$. Тогда ξ можно продолжить до аддитивной функции на алгебре цилиндрических множеств, которую мы обозначаем за $\mu \times \nu$.

Доказательство: Легко видеть, что пересечение цилиндрических множеств цилиндрическое. Поэтому достаточно доказать, что если цилиндрическое множество Z разбито в конечное объединение цилиндрических, $Z = \bigcup Z_i$, то $\xi(Z) = \sum \xi(Z_i)$. Это видно из следующей картинки. Для



Разбиение множества $M \times N$ в объединение цилиндрических

формального доказательства, рассмотрим измельчение разбиения $Z = M \times N = \bigcup Z_i$ такое, что $M = \coprod M_p$, $N = \coprod N_q$, и $M \times N = \coprod_{p,q} M_p \times N_q$. Назовем такое разбиение **простым**. Для простого разбиения, аддитивность меры следует сразу из определения. С другой стороны, каждый из Z_i будет объединением нескольких элементов вида $M_p \times N_q$, причем такое разбиение Z_i тоже будет простым, значит, $\xi(Z) = \sum \xi(Z_i)$ следует из $\xi(Z) = \sum_{p,q} \xi(M_p \times N_q)$. ■

Чтобы продолжить построенную аддитивную меру ξ на сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами, достаточно доказать ее σ-аддитивность, то есть проверить, что $\xi(Z) \leqslant \sum \xi(Z_i)$ для любого цилиндрического множества $Z \subset \coprod_{i=1}^{\infty} Z_i$ (если это верно, то мы продолжим ξ на пополнение алгебры цилиндрических множеств, как в лекции 4, а пополнение содержит, среди прочего, и сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами).

Сигма-аддитивность ξ следует из того же аргумента, который доказывал утверждение 6.15. Заменим разбиение $Z = \coprod_{i=1}^{\infty} Z_i$ на его измельчение вида $Z = \coprod_{p,q} M_p \times N_q$. Тогда $\sum \xi(Z_i) = \sum \xi(M_p \times N_q) \geqslant \xi(Z)$ (последнее неравенство следует из σ-аддитивности μ и ν).

Мы получили такое утверждение

Утверждение 6.16: Пусть $W = M \times N$ – произведение множеств, снабженных сигма-алгебрами A_M и A_N, A_W – сигма-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами, а μ, ν – сигма-аддитивные меры на A_M, A_N. Тогда $\mu \times \nu$ продолжается до счетно-аддитивной меры на $M \times N$. ■

6.3.2. Теорема Фубини

В этом разделе, все меры по умолчанию предполагаются мерами Лебега.

Определение 6.17. Пусть μ, ν – σ-аддитивные меры на A_M и A_N. **Измеримое подмножество** в $M \times N$ есть подмножество, которое получается как предел последовательности Коши элементов A_W, в метрике, заданной как $d(X,Y) = \mu \times \nu(X \triangle Y)$. **Измеримая функция** на $M \times N$ есть функция со значениями в $\mathbb{R}$, такая, что прообраз любого борелевского множества измерим.

Теорема 6.18: (теорема Фубини) Пусть M, N – пространства, снабженные сигма-алгебрами A_M и A_N и σ-конечной мерой μ, ν, а $\xi = \mu \times \nu$ – мера произведения на $M \times N$. Рассмотрим интегрируемую функцию $f:\ M \times N \longrightarrow \mathbb{R}$, и пусть $M \times N \stackrel{\pi}{\longrightarrow} M$ - проекция. Тогда

(i) Для почти всех $m \in M$, ограничение $f\Big|_{\pi^{-1}(m)}$ – интегрируемая функция на $\pi^{-1}(m) \cong N$.

(ii) Пусть $\varphi:\ M \longrightarrow \mathbb{R}$ – функция, заданная формулой $\varphi(m) := \int_N f\Big|_{\pi^{-1}(m)} \nu$ вне множества меры 0, где интеграл $\int_\nu f\Big|_{\pi^{-1}(m)}$ не определен. Тогда φ интегрируема, и $\int_{M\times N} f\xi = \int_M \varphi\mu$.

Доказательство теоремы Фубини занимает остаток этого раздела. Отметим сразу, что достаточно доказать ее для функции $f \geqslant 0$, потому что $f = (|f| + f) - (|f| - f)$, где каждый из членов в скобках интегрируем и неотрицателен. Поэтому будем считать, что $f \geqslant 0$.

Следующее упражнение доказывается так же, как и теорема о том, что измеримые по Лебегу множества суть борелевские с точностью до меры нуль.

Упражнение 6.19: В условиях теоремы Фубини, обозначим за $\mathfrak{A}$ сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами. Докажите, что каждое измеримое подмножество $X \subset M \times N$ удовлетворяет $\xi(X \triangle X') = 0$ для какого-то $X' \in \mathfrak{A}$.

Лемма 6.20: Для любой измеримой функция f найдется f', которая получается как предел монотонной последовательности $f'_n = \sum c_i \chi(Z'_i)$, где все Z'_i принадлежат $\mathfrak{A}$, а $f - f' = 0$ почти всюду.

Доказательство: Как было доказано в предыдущей лекции, измеримая функция f получается как предел монотонно неубывающей последовательности $f_n := \Psi_n(f)$ ступенчатых функций вида $f_n = \sum c_i \chi(Z_i)$, где $\chi(Z_i)$ есть характеристическая функция измеримого множества Z_i. Заменив каждое из Z_i на множестви $Z'_i \in \mathfrak{A}$, такое, что $Z_i \triangle Z'_i$ имеет меру 0, получим последовательность $f'_n = \sum c_i \chi(Z'_i)$. Эта последовательность не обязательно монотонна, но она монотонна вне множества $Z := \bigcup_i (Z_i \triangle Z'_i)$ меры ноль. Положим все f'_n равными 0 на Z и получим монотонную последовательность ступенчатых функций вида $f'_n = \sum c_i \chi(Z_i \backslash Z)$, с множествами уровня $Z_i \backslash Z \in \mathfrak{A}$. ∎

Применяя лемму 6.20 к функции f из теоремы Фубини, и пользуясь тем фактом, что пересечение множества $V \in \mathfrak{A}$ с $\pi^{-1}(m)$ измеримо, мы получим, что функция $f'\Big|_{\pi^{-1}(m)}$ измерима для каждого $m \in M$. В самом деле, $f'\Big|_{\pi^{-1}(m)}$ получено как предел монотонной последовательности ступенчатых, измеримых функций.

Обозначим за Z подмножество в $M\times N$, где $f\neq f'$, и пусть $\pi_*Z\subset M$ – множество всех точек M, для которых $Z\cap\pi^{-1}(m)$ не меры 0. Ограничение $f\Big|_{\pi^{-1}(m)}$ отличается от $f'\Big|_{\pi^{-1}(m)}$ вне множества $Z\cap\pi^{-1}(m)$, которое имеет меру 0 для $m\notin\pi_*Z$. Значит, $f\Big|_{\pi^{-1}(m)}$ измеримо для любого $m\notin\pi_*Z$.

Мы получаем, что теорема 6.18 (i) вытекает из следующей леммы.

Лемма 6.21: Пусть $Z\subset M\times N$ – множество меры 0. Тогда $Z\cap\pi^{-1}(m)$ имеет меру 0 для почти всех $m\in M$.

Доказательство: Покроем Z счетным набором $\{Z_i(\frac{1}{n^2})\}$ цилиндрических множеств суммарной меры $\leqslant\frac{1}{n^2}$. Обозначим за $M(\frac{1}{n})\subset M$ подмножество, состоящее из всех $m\in M$ таких, что $\pi^{-1}(m)\cap\bigcup Z_i(\frac{1}{n^2})$ имеет меру $\geqslant\frac{1}{n}$. В силу того, что $\bigcup Z_i(\frac{1}{n^2})$ имеет меру $\leqslant\frac{1}{n^2}$, мера $M(\frac{1}{n})$ ограничена: $\mu(M(\frac{1}{n}))\leqslant\frac{1}{n}$. Для любой точки m, не лежащей в $\bigcap_n M(\frac{1}{n})$, мера $Z\cap\pi^{-1}(m)$ равна нулю (проверьте это). С другой стороны, $\bigcap_n M(\frac{1}{n})$ покрывается множествами $M(\frac{1}{n})$ произвольно малой меры, значит, это множество меры 0. ■

Замечание 6.22. Пусть $Z\subset M$ – множество меры 0, а f – измеримая функция на M, которая равна нулю вне Z. Тогда $\int_\mu f=0$. Действительно, $\int_\mu f$ получается как предел интегралов ступенчатых функций f_n, которые равны нулю вне Z, но каждый такой интеграл выражается суммой вида $\sum c_i\mu(Z_i)$, где $Z_i\subset Z$. Поскольку $\mu(Z)=0$, имеем $\mu(Z_i)=0$, значит, $\int_\mu f_n=0$. В лекции 5 это замечание присутствует как Упражнение 5.31.

Воспользовавшись первой частью теоремы Фубини, заменим f на функцию f', такую, что $f'\Big|_{\pi^{-1}(m)}$ интегрируемо для любого $m\in M$, а $f=f'$ вне множества меры 0. Из замечания 6.22 следует, что достаточно доказать 6.18 (ii) в этом предположении. Поэтому мы можем с самого начала предполагать, что $f\Big|_{\pi^{-1}(m)}$ интегрируемо для любого $m\in M$.

Для доказательства второго утверждения теоремы Фубини, нам понадобится следующее понятие.

Определение 6.23. Пусть M,N – пространства с σ-алгебрами A_M и A_N. **Измеримое отображение** есть такое отображение $f:\ M\longrightarrow N$, что прообраз множества, лежащего в A_N, содержится в A_M.

Замечание 6.24. Обыкновенная "измеримая функция" есть измеримое отображение из пространства с σ-алгеброй в $\mathbb{R}$ с сигма-алгеброй борелевских множеств.

Замечание 6.25. Пусть $W=M\times N$ – произведение множеств, снабженных сигма-алгебрами A_M и A_N, а A_W – сигма-алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами в W. Рассмотрим проекцию $M\times N\ \stackrel{\pi}{\longrightarrow}\ M$. Поскольку прообраз $\pi^{-1}(Z)$ измеримого множества $Z\subset M$ цилиндрический, он измерим, значит, π есть измеримое отображение.

Определение 6.26. Пусть $f:\ M\longrightarrow N$ – измеримое отображение пространств, снабженных сигма-алгебрами A_M и A_N, а μ есть сигма-аддитивная мера на A_M. Рассмотрим функцию $\pi_*\mu$ на A_N, заданную формулой $\pi_*\mu(Z):=\mu(\pi^{-1}(Z))$. Легко видеть, что $\pi_*\mu$ есть σ-аддитивная мера на A_N (проверьте это). Мера $\pi_*\mu$ называется **прямым образом меры μ.**

Утверждение 6.27: В условиях теоремы Фубини (Теорема 6.18), мера $\pi_*(f\xi)$ является абсолютно непрерывной: $\pi_*(f\xi)\ll\mu$.

Доказательство: Если $Z \subset M$ имеет меру нуль, то $\pi_*(f\xi)(Z) = \int_\xi f\Big|_Z = 0$ в силу замечания 6.22. Значит, $\pi_*(f\xi)(Z) = 0$ для любого множества меры нуль. ■

Применяя теорему Радона-Никодима, мы находим, что $\pi_*(f\xi) = t\mu$, где t есть интегрируемая функция, удовлетворяющая $\int_\mu t = \int_\xi f$. Для доказательства теоремы Фубини осталось доказать, что $t = \varphi$, где φ – функция, определенная в теореме 6.18 (ii).

Заменив f на монотонно неубывающий предел ступенчатых функций $f = \lim f_i$, мы получим, что соотвествующие функции $t(f_i)$ и $\varphi(f_i)$ тоже монотонно неубывают. Поскольку интеграл перестановочен с пределом монотонно неубывающих функций (см. в прошлой лекции), мы получаем, что достаточно доказать, что $t = \varphi$ для ступенчатой функции f. Разбив f в счетную сумму вида $f = \sum c_i \chi(U_i)$, получим, что остается доказать теорему 6.18 (ii) для характеристической функции измеримого множества, $f = \chi(U)$.

Измеримое множество в $M \times N$ получается как предел счетных объединений цилиндрических; снова переходя к пределу, убеждаемся, что достаточно доказать, что $\varphi = t$ для $f = \chi(U)$, где U – цилиндрическое множество. Но в такой ситуации это утверждение является тавтологией (проверьте это). Мы закончили доказательство теоремы Фубини. ■

Guido Fubini
(January 19, 1879 - June 6, 1943)

6.3.3. Гвидо Фубини

Фубини был учеником Луиджи Бьянки. Бьянки занимался дифференциальной геометрией однородных римановых многообразий, и получил их классификацию в размерности 3. Диссертация Фубини (1902) была посвящена дифференциальной геометрии однородных многообразий, но сразу после защиты тезиса он занялся анализом на симметрических пространствах, и опубликовал работу о гармонических функциях. Фубини успешно работал во множестве отраслей математики, физики и инженерного дела. Он придумал теорему Фубини о кратных интегралах и метрики Фубини-Штуди, полезные в комплексной алгебраической геометрии.

У Фубини было два сына, оба инженеры. Фубини много времени проводил со своими сыновьями, интересуясь инженерными вопросами, и даже написал учебник прикладной математики. Он был евреем. Когда в 1938-м году Муссолини (доселе индифферентный к еврейскому вопросу, и относившийся к евреям не без симпатии) под давлением Гитлера объявил о преследовании евреев и опубликовал "Манифест о расе", Фубини решил, что для блага всей семьи ему лучше эмигрировать, и в скором времени эмигрировал, вместе с сыновьями, став профессором в Принстоне. Фубини был к тому моменту весьма нездоров, много болел, и через 4 года после эмиграции умер.

Один из сыновей Гвидо Фубини, Юджин, стал директором военных исследователей в Пентагоне и заместителем военного министра США; он воевал во второй мировой войне (на стороне Америки). У него было 6 дочерей, сын, и 16 внуков.