2. Теория меры, лекция 2: инвариант Дэна и третья проблема Гильберта

2.1. Третья проблема Гильберта

Определение 2.1. Два многогранника M, M' называются **равносоставленными**, если они допускают триангуляции S, S', такие, что задана биекция множества симплексов S в множество симплексов S', переводящая каждый симплекс в конгруэнтный ему.

Задача 2.2. Докажите, что равносоставленность есть отношение эквивалентности.

Определение 2.3. Два многогранника называются **равновеликими**, если они имеют одинаковый объем. Легко видеть, что равносоставленные многогранники равновелики.

Третья проблема Гильберта формулируется так

Гаусс в двух своих письмах к Герлингу выражает сожаление по поводу того, что некоторые известные положения стереометрии зависят от метода исчерпывания, т.е., говоря современным языком, от аксиомы непрерывности (или от аксиомы Архимеда).

Гаусс специально отмечает теорему Евклида, согласно которой объемы треугольных пирамид, имеющих равные высоты, относятся как площади их оснований. Аналогичная задача планиметрии ныне полностью решена. Герлингу удалось также доказать равенство объемов симметричных многогранников при помощи разбиения их на конгруэнтные части.

Тем не менее, как мне кажется, в общем случае доказательство упомянутой теоремы Евклида этим способом провести невозможно и это, по-видимому, может быть подтверждено строгим доказательством невозможности.

Такое доказательство можно было бы получить, если бы удалось указать такие два тетраэдра с равными основаниями и равными высотами, которые никаким способом не могут быть разложены на конгруэнтные тетраэдры и которые также не могут быть дополнены конгруэнтными тетраэдрами до таких многогранников, для которыхй разложение на конгруэнтные тетраэдры невозможно.

(цитируется по книге В. Г. Болтянского "Третья проблема Гильберта", издательство "Наука", Москва, 1977)

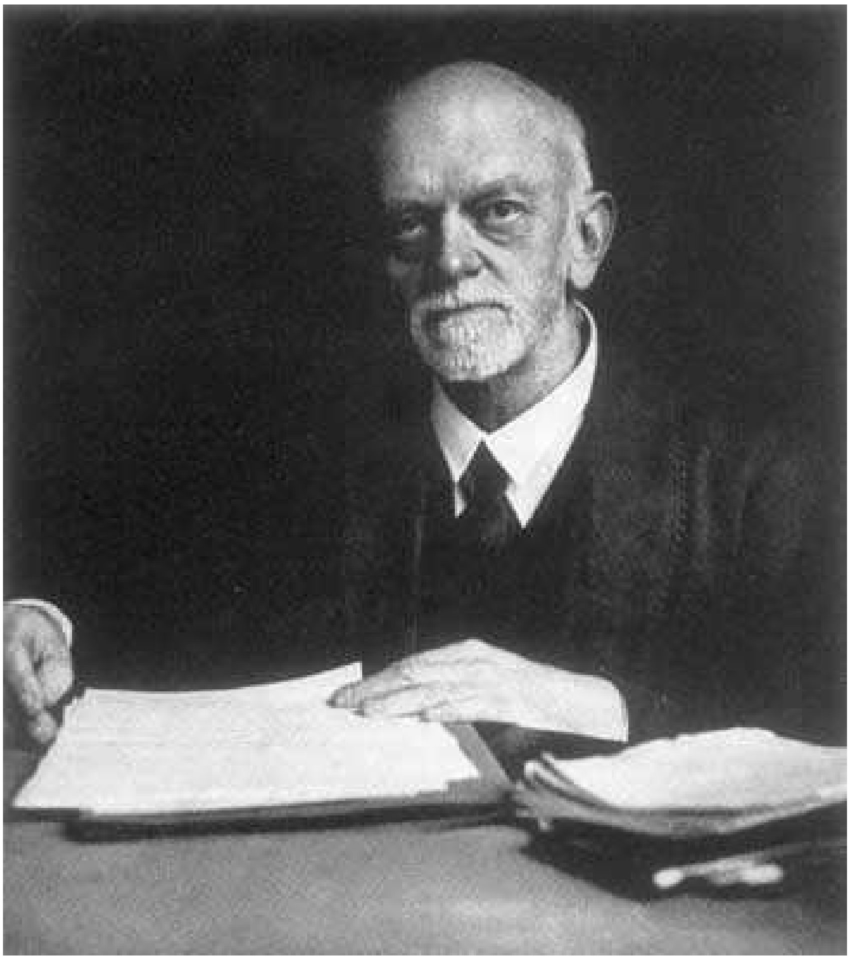
Немного упростив, это же самое можно изложить так

Третья проблема Гильберта Постройте два равновеликих многогранника, которые не равносоставлены.

В этой лекции я расскажу решение этой проблемы, полученное Максом Дэном (Max Dehn), который построил такие многогранники для $\mathbb{R}^3$.

2.2. Конечно-аддитивные меры на кольце многогранников

Напомним, что **конечно-аддитивная мера** на кольце многогранников есть функция $\mu : \mathfrak{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющая каждому многограннику число, конечно-аддитивная (то есть удовлетворяющая



David Hilbert
(January 23, 1862 – February 14, 1943)

$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B))$ и зануляющаяся на вырожденных многогранниках. Такая функция называется **инвариантной** (или инвариантной относительно движений) если $\mu(A) = \mu(B)$ для любых конгруэнтных многогранников A, B.

В лекции 1 я определил объем многогранника, с помощью триангуляции и определителя. Мы видели, что он удовлетворяет перечисленным свойствам, то есть является инвариантной, конечно-аддитивной мерой на кольце многогранников.

Для любого гомоморфизма групп $\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$, функция $A \longrightarrow \varphi(\operatorname{Vol}(A))$ тоже задает инвариантную счетно-аддитивную меру. Таких гомоморфизмов весьма много: если задан базис $\{\xi_i\}$ в $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$, можно написать $\varphi(\xi_i)$ произвольным образом, и продолжить полученное отображение на $\mathbb{R}$ по линейности. Поэтому конечно-аддитивных мер тоже очень много.

Задача 2.4. Докажите, что мощность множества $\mathbb{Q}$-линейных гомоморфизмов $\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ равна $2^{\mathbb{R}}$, то есть мощности множества подмножеств континуума.

Тем не менее, множество конечно-аддитивных инвариантных мер в каких-то ситуациях поддается описанию. Например, если все равновеликие многогранники равносоставлены, любую конечно-аддитивную меру можно выразить через объем.

Предложение 2.5: Предположим, что равновеликие многогранники в $\mathbb{R}^n$ равносоставлены. Тогда каждая конечно-аддитивная инвариантная мера μ имеет вид $A \longrightarrow \varphi(\operatorname{Vol}(A))$ для какого-то гомоморфизма $\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$.

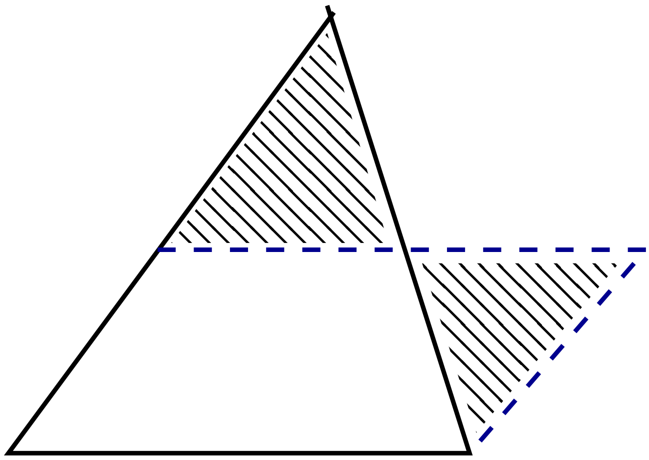
Доказательство: Возьмем куб A с объемом λ, и положим $\varphi(\lambda) := \mu(A)$. Поскольку каждый многогранник B с объемом λ равносоставлен с A, имеем $\mu(B) = \varphi(\operatorname{Vol}(B))$. Отображение $\varphi : \mathbb{R}^{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ аддитивно, потому что μ аддитивно. Значит, φ продолжается до гомоморфизма из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ (проверьте это). ■

2.3. Равносоставленность многоугольников

В $\mathbb{R}^2$ равносоставленность следует из равновеликости. Напомню, что **многоугольник** это многогранник на плоскости $\mathbb{R}^2$

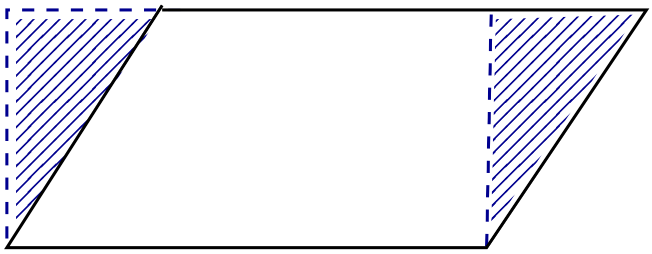
Теорема 2.6: (теорема Бойяи-Гервина)
Равновеликие многоугольники равносоставлены.

Доказательство. Шаг 1:



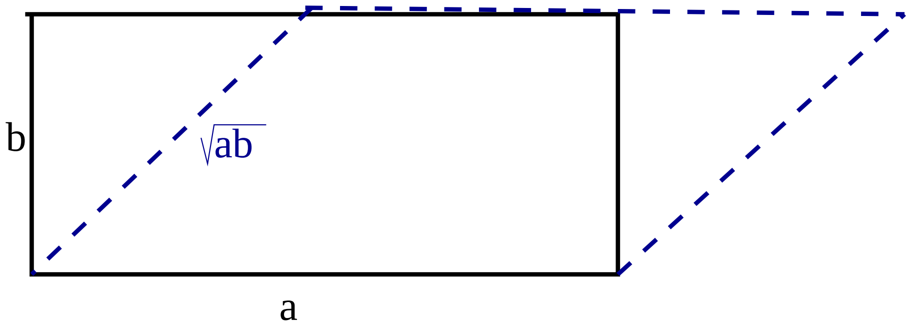
Любой треугольник равносоставлен параллелограмму с тем же основанием и одним из углов.

Шаг 2:



Любой параллелограмм равносоставлен прямоугольнику с тем же основанием.

Шаг 3:



Прямоугольник со сторонами $> b$ равносоставлен параллелограмму со сторонами a и $\sqrt{ab}$.

Шаг 4: Применяя шаг 3, мы убеждаемся, что любой прямоугольник с площадью $S = ab$ равносоставлен параллелограмму с основанием $\sqrt{S}$. Применяя шаг 2, находим прямоугольник, равносоставленный этому параллелограмму (в частности, площади S) и с основанием $\sqrt{S}$. Такой прямоугольник будет квадратом. Мы получили, что любой прямоугольник равносоставлен квадрату той же площади.

Шаг 5: Из этого вытекает, что любой треугольник равносоставлен любому прямоугольнику той же площади.

Шаг 6: Возьмем какой-то многоугольник M и триангулируем его. Каждый из полученных треугольников D_i разрежем на куски, получив прямоугольник с основанием 1 и стороной $\operatorname{Vol}(D_i)$. Составив их вместе, получим прямоугольник со сторонами 1 и $\operatorname{Vol}(M)$, равносоставленный M. Сделав такую же операцию с другим многоугольником с той же площадью, снова получим прямоугольник со сторонами 1 и $\operatorname{Vol}(M)$. Значит, они равносоставлены. ■

2.4. Инвариант Дэна

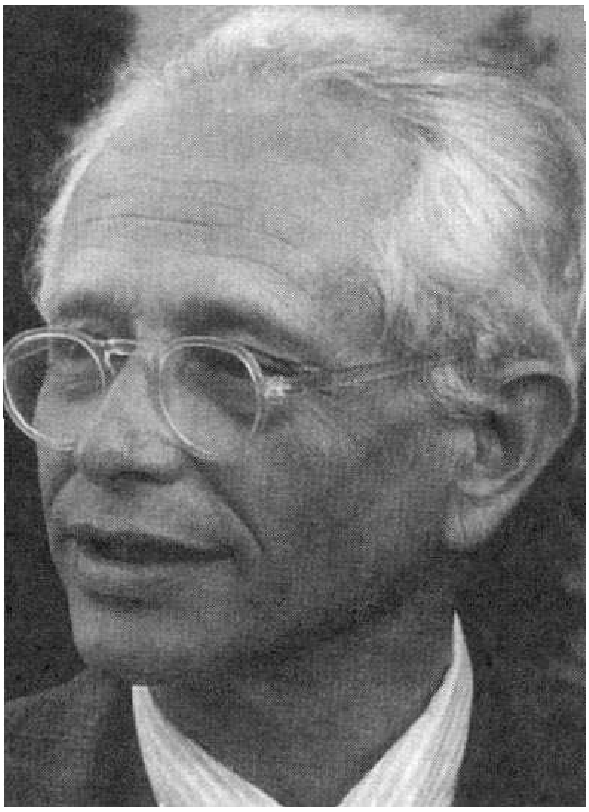
Пусть $\mu : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ – конечно-аддитивная, инвариантная мера на кольце многогранников. Если $\mu(A) \neq \mu(B)$, эти многогранники очевидно не равносоставлены. Поэтому, чтобы получить контрпример к третьей проблеме Гильберта, достаточно построить конечно-аддитивную, инвариантную меру на кольце многогранников, которая будет различать равновеликие многогранники.

В $\mathbb{R}^2$ меры, различающей равновеликие многоугольники, не бывает, что следует из теоремы Бойяи-Гервина. Такая мера существует в $\mathbb{R}^3$, и называется **инвариантом Дэна**, в честь Макса Дэна, студента Гильберта, построившего ее в 1900-м году.

Рассмотрим какой-нибудь $\mathbb{Q}$-линейный гомоморфизм $\mathbb{R} \xrightarrow{\theta} \mathbb{R}$, зануляющийся на π. Чтобы построить такой гомоморфизм, надо выбрать базис в $\mathbb{R}$ как в векторном пространстве над $\mathbb{Q}$ (существование такого базиса следует из леммы Цорна) и задать θ на базисных векторах, таким образом, что $\theta(\pi) = 0$.

Существует не один инвариант Дэна, а целое семейство; они параметризуются гомоморфизмами $\mathbb{R} \xrightarrow{\theta} \mathbb{R}$, где $\theta(\pi) = 0$. Зафиксируем такой гомоморфизм, и пусть A – многогранник в $\mathbb{R}^3$, с ребрами длины $d_1, ..., d_n$ и двугранными углами $\alpha_1, ..., \alpha_n$ в этих ребрах, измеренными в радианах. Положим $D_\theta(A) := \sum_i d_i \theta(\alpha_i)$.

Утверждение 2.7: Определенный выше инвариант Дэна D_θ определяет конечно-аддитивную, инвариантную меру на кольце многогранников.



Max Dehn
(November 13, 1878 – June 27, 1952)

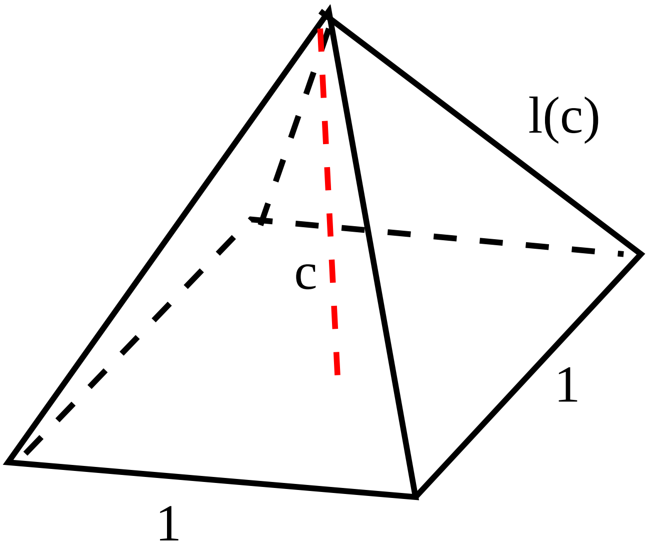
Доказательство: Разрежем многогранник A плоскостью L на два многогранника A_1 и A_2. Некоторые ребра A окажутся целиком на L; в этом случае соответствующие двугранные углы у A_1 и A_2 дают в сумме двугранный угол для A. Другие ребра будут разрезаны на две части, и соответствующий двугранный угол в A_1 будет равен его аналогу у A_2. Значит, эти ребра дают в инвариант Дэна A вклад, который равен сумме их вкладов в инвариант Дэна A_1 и A_2. Наконец, для всех новых ребер, лежащих на L, соответствующие двугранные углы дают в сумме π. Значит, суммарные вклады этих ребер в $D_\theta(A_1)$ и $D_\theta(A_2)$ сокращаются.

Мы получили, что для любой плоскости, рассекающей многогранник A в объединение A_1 и A_2, имеем $D_\theta(A_1) + D_\theta(A_2) = D_\theta(A)$. Вывести из этого аддитивность инварианта Дэна весьма просто; я оставлю это в качестве упражнения. ■

2.5. Вычисление инварианта Дэна

Легко видеть, что инвариант Дэна параллелепипеда равен нулю. В самом деле, все углы параллелепипеда равны $\frac{\pi}{2}$, а $\theta(\frac{\pi}{2}) = 0$. Если мы найдем многогранник M с нетривиальным инвариантом Дэна D_θ, это даст решение третьей проблемы Гильберта, потому что $D_\theta(M) \neq 0$, а $D_\theta(M') = 0$ для параллелепипеда M', равновеликого M.

В качестве M можно взять, например, правильный тетраэдр Δ. Все ребра и все двугранные углы тетраэдра равны, что дает $D_\theta(\Delta) = 6\theta(\alpha)$, где α – двугранный угол правильного тетраэдра. Нетрудно убедиться, что $\alpha = \arccos(1/3)$, но чтобы найти θ, удовлетворяющий $\theta(\alpha) \neq 0$, надо доказать, что $\frac{\alpha}{\pi}$ иррационально. Решение этой теоретико-числовой задачи излагаеся в листочке 1.



Пирамида с квадратным основанием

Другое решение этой проблемы неявное, но существенно более простое. Отметим сразу, что инвариант Дэна допускает следующее нехитрое обобщение. Пусть $\xi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ – $\mathbb{Q}$-линейный гомоморфизм. Для многогранника A в $\mathbb{R}^3$, с ребрами длины $d_1, ..., d_n$ и двугранными углами $\alpha_1, ..., \alpha_n$ в этих ребрах, положим $D_{\xi,\theta} := \sum_i \xi(d_i)\theta(\alpha_i)$. Легко видеть. что этот инвариант тоже аддитивен, в силу того же самого аргумента, который доказывает аддитивность инварианта Дэна. Пусть теперь A_c - четырехгранная симметричная пирамидка, с квадратным основанием и высотой c, причем ребро при основании имеет длину 1. У этой пирамидки есть два вида ребер, четыре ребра длины 1 у основания, и 4 длины $l(c)$, соединяющие основание и вершину. Обозначим двугранные углы у этих ребер за $\alpha(c)$, Выбрав ξ таким образом, чтобы $\xi(1) = 0$, получим

$$D_{\xi,\theta}(A_c) = 4\xi(l(c))\theta(\alpha(c)).$$

Гомоморфизмы ξ, θ выберем таким образом, чтобы $\ker(\xi) = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, а $\ker(\theta) = \mathbb{Q}\pi \subset \mathbb{R}$. Такие гомоморфизмы существуют, что следует из того же самого аргумента с базисом. Тогда $\xi(l(c))\theta(\alpha(c)) = 0$ для всех c, только если $l(c)$ либо $\frac{\alpha(c)}{\pi}$ всегда рациональны. Поскольку $l(c)$ и $\alpha(c)$ монотонно возрастают, $l(c)$ может быть рационально только для счетного набора c, и то же самое верно для $\frac{\alpha(c)}{\pi}$. Выбрав c вне этих счетных подмножеств, мы отыщем пирамидку с нетривиальным инвариантом Дэна $D_{\xi,\theta}$.

2.6. История третьей проблемы Гильберта

Гильберт огласил список десяти "проблем Гильберта" на международном математическом конгрессе в Париже, в 1900-м году. Впоследствии Гильберт добавил еще 13 проблем, и эта версия списка проблем Гильберта (из 23 проблем) стала канонической.

Третья проблема Гильберта была решена в 1900-м году Максом Дэном, студентом Гильберта, в его диссертации "Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck" (Теорема Лежандра о сумме углов треугольника). Впоследствии Дэн стал одним из основателей топологии и современной теории групп.

После прихода к власти нацистов Дэна уволили с его профессорской позиции в университете Франкфурта, и ему пришлось в 1940-м году эмигрировать в Америку (через Скандинавию, Россию и Японию). В Америке он долго не мог найти работу, и в результате попал в школу искусств под названием Black Mountain College, где ему собирались платить 25 долларов в месяц (правда, потом зарплату повысили до 40). За отсутствием студентов-математиков, Дэну пришлось читать лекции о математической сущности орнаментов. Дэн оставался в Black Mountain College до своей смерти в 1952-м году, и был единственным профессором математики за всю историю этого колледжа (закрывшегося в 1956-м году).

Другим преподавателем Black Mountain College был известный композитор Джон Кэйдж, а также Бакминстер Фуллер.

William Wallace
(September 23, 1768 – April 28, 1843)

Теорема Бойяи-Гервина (Bolyai-Gerwien theorem) была доказана Фаркашем Бойяи (отцом Яноша Бойяи, одного из изобретателей неевклидовой геометрии) в 1832-м году, и П. Гервином в 1833-м. Первым опубликовал доказательство этой теоремы шотландский математик Уильям Уоллес, в 1807 году.

Много полезных сведений о третьей проблеме Гильберта и связанных с ней более современных исследованиях можно подчерпнуть в книге Болтянского "Третья проблема Гильберта".

3. Теория меры, лекция 3: G-равносоставленные многогранники

Задача этой лекции – доказательство теоремы, которая была сформулирована в лекции 1. Из ее утверждения следует корректность определения объема многобранников.

Теорема 3.1: Пусть S - триангуляция симплекса X, разбивающая X в объединение симплексов $X_1, ..., X_n$. Тогда $\operatorname{Vol}(X) = \sum \operatorname{Vol}(X_i)$.

Я использую аргумент, концептуально повторяющий логику Гильберта, который определял объем многоугольников в $\mathbb{R}^2$, пользуясь теоремой Бойяи-Гервина о равносоставленности равновеликих многоугольников. Аналог этой теоремы верен и в $\mathbb{R}^n$, если заменить группу движений на более удобную группу.

3.1. G-конгруэнтность и G-равносоставленность

Определение 3.2. Обозначим за $GL(n)$ группу всех линейных автоморфизмов пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $G \subset GL(n)$ – произвольная подгруппа. Два подмножества $M, M' \subset \mathbb{R}^n$ называются **G-конгруэнтными**, если M можно перевести в M' композицией $g \in G$ и параллельного переноса.

Определение 3.3. Два многогранника M, M' называются **G-равносоставленными**, если они допускают триангуляции S, S', такие, что задана биекция множества симплексов S в множество симплексов S', переводящая каждый симплекс в G-конгруэнтный ему.

Замечание 3.4. G-равносоставленность есть отношение эквивалентности, по той же причине, по которой это верно для обычной равносоставленности.

Замечание 3.5. Если $G = O(n)$ – группа линейных изометрий $\mathbb{R}^n$, то G-конгруэнтность и G-равносоставленность эквивалентны обычным.

3.2. $SL^{\pm}(n)$-равносоставленность

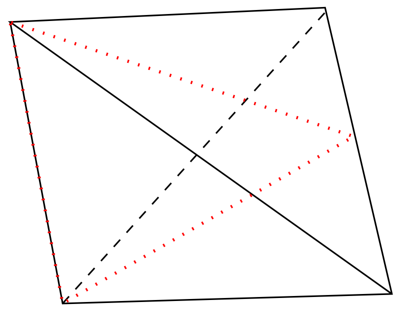
В доказательстве теоремы 3.1, нас интересует G-равносоставленность для группы $G = SL^{\pm}(n)$, состоящей из всех матриц $A \in GL(n)$ с $\det A = \pm 1$. Из определения ясно, что эта группа сохраняет объемы симплексов. Для такой группы верен следующий аналог теоремы Бойяи-Гервина.

Теорема 3.6: Пусть X, Y – два многогранника, снабженные триангуляциями $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$, такие, что $\sum \operatorname{Vol} X_i = \sum \operatorname{Vol} Y_i$. Тогда X и Y $SL^{\pm}(n)$-равносоставлены.

Доказательство. Шаг 1: Назовем **объемом параллелепипеда**, натянутого на вектора $x_1, ..., x_n$, соответствующий определитель $|\det(x_1, ..., x_n)|$. Все параллелепипеды одинакового объема переводятся друг в друга действием $SL^{\pm}(n)$ и параллельными переносами, по определению $SL^{\pm}(n)$, значит, $SL^{\pm}(n)$-равносоставлены.

Шаг 2: По той же самой причине, все симплексы одинакового объема $SL^{\pm}(n)$-равносоставлены.

Шаг 3: Каждый симплекс можно разбить в объединение N симплексов одинакового объема (проверьте). Для $N = 2$ такое разбиение приводится на картинке.



Симплекс разбит в объединение двух симплексов одинакового объема

Шаг 4: Каждый куб в $\mathbb{R}^n$ можно разбить на $2n \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdot ... = 2^n n!$ конгруэнтных симплексов. В самом деле, барицентрическое разбиение (то самое, которое использовалось для триангуляции выпуклого многобранника) обладает таким свойством, если на каждом шаге выбирать точку в центре грани.

Шаг 5: Из шага 3 вместе с шагом 4 немедленно следует, что куб $SL^{\pm}(n)$-равносоставлен тетраэдру того же объема. Из каждого симплекса X_i и Y_i сделаем $SL^{\pm}(n)$-равносоставленный им параллелограмм с одинаковым основанием, сложим эти параллелограммы штабелями, как в доказательстве теоремы Бойяи-Гервина, и получим, что X и Y $SL^{\pm}(n)$-равносоставлены одинаковым параллелограммам. ■

3.2.1. G-равносоставленность и триангуляция параллелограмма

Для доказательства теоремы 3.1, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.7: Пусть – симплекс объема ε в $\mathbb{R}^n$. Тогда можно покрыть X прямоугольными параллелепипедами со сторонами, параллельными осям координат, и суммарным объемом не больше $n!\varepsilon$.

Упражнение 3.8: Докажите эту лемму.

Теперь мы можем доказать теорему 3.1. Пусть $\{X_i\}$, $\{Y_i\}$ – две триангуляции одного многогранника, имеющие разный объем. Из теоремы о $SL^{\pm}(n)$-равносоставленности, из этого следует, что параллелепипед $SL^{\pm}(n)$-равносоставлен меньшему параллелепипеду с тем же основанием. Повторяя это разбиение с меньшим параллелепипедом, получаем триангуляцию единичного куба C, причем суммарный объем составляющих ее симплексов меньше любого наперед заданного числа. Заменив симплексы параллелепипедами, построенными по тем же векторам, получим покрытие C параллелепипедами с суммарным объемом меньше любого заданного ε. Применив лемму 3.7 мы можем с самого начала предполагать, что эти параллелепипеды прямоугольные и со сторонами, параллельными осям координат. Но это невозможно, как следует из приведенной ниже задачи, которая завершает доказательство теоремы 3.1.

Упражнение 3.9: Пусть $\{X_i\}$ – покрытие единичного куба параллелепипедами со сторонами, параллельными осям координат. Тогда сумма объемов X_i не меньше 1.

Указание 3.10. Разбив это покрытие на параллелепипеды поменьше, получите покрытие куба $C = I^n$ вида $\{\bigcup_i A_i(1)\} \times \{\bigcup_i A_i(2)\} \times ... \times \{\bigcup A_i(n)\}$ где $A_i(k)$ – покрытие отрезка I. Суммарный объем симплексов такого покрытия, очевидно, равен 1.