Гиперболические группы 6: углы и конусы

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим.

Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) трех – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 21 дней после выдачи, 1, если между 21 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

6.1. Углы и пространства направлений

Определение 6.1. Внутренняя метрика в метрическом пространстве M называется **строго внутренней**, если любые две точки $x, y \in M$ можно соединить **кратчайшей**, то есть путем γ с $L_d(\gamma) = d(x, y)$. Кратчайшая $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$ **имеет геодезическую параметризацию**, если это отображение – изометрия.

Замечание. В прошлом листочке было доказано, что внутренняя метрика в полном, локально компактном метрическом пространстве является строго внутренней. В этом листочке можно пользоваться этим фактом. Также, все метрические пространства, которые тут упоминаются, по умолчанию считаются наделенными строго внутренней метрикой, которая, ко всему прочему, **конечна**, то есть не принимает значения ∞, а все кратчайшие - снабженными геодезической параметризацией.

Определение 6.2. Пусть a, b, c – точки в метрическом пространстве (M, d). Здесь и в дальнейшем $\mathbb{R}^2$ предполагается метрическим пространством, с обычной (евклидовой) метрикой. **Треугольник сравнения** $\triangle(\bar a, \bar b, \bar c)$ есть треугольник в $\mathbb{R}^2$, с вершинами $\bar a, \bar b, \bar c$, и сторонами $|\bar a, \bar b| = d(a, b)$, $|\bar a, \bar c| = d(a, c)$, и $|\bar b, \bar c| = d(b, c)$ (такой треугольник, очевидно, существует, и определен единственно с точностью до конгруэнтности). Угол $\measuredangle(\bar a, \bar b, \bar c)$ в треугольнике $\bar a, \bar b, \bar c$ обозначается $\theta(a, b, c)$; он называется **углом сравнения**.

Определение 6.3. Пусть $\gamma_1 : [0, a] \longrightarrow M$, $\gamma_2 : [0, b] \longrightarrow M$ два пути в метрическом пространстве M, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$. **Угол** между путями γ_1, γ_2 в p есть число

$$\measuredangle(\gamma_1, p, \gamma_2) := \lim_{t,s\to 0} \theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s)),$$

если такой предел существует (в противном случае, говорится, что **угол между γ_1 и γ_2 не существует**). **Верхний угол** есть

$$\measuredangle_{\mathsf{sup}}(\gamma_1, p, \gamma_2) := \limsup_{t,s\to 0} \theta(\gamma_1(t), p, \gamma_2(s)),$$

где $\lim\mathsf{sup}$ обозначает супремум всех предельных точек последовательностей $\theta(\gamma_1(t_i), p, \gamma_2(s_j))$, для всех t_i, s_j сходящихся к 0.

Задача 6.1. Пусть γ_1, γ_2 – гладкие пути в $\mathbb{R}^n$. докажите, что угол $\measuredangle(\gamma_1, p, \gamma_2)$ существует и равен углу между соответствующими касательными.

Задача 6.2. Пусть $\gamma :: [0,a] \longrightarrow M$ – кратчайшая (наделенная, как всегда, геодезической параметризацией), а $\gamma(0) = p$. Докажите, что угол $\measuredangle_{\mathsf{sup}}(\gamma, p, \gamma)$ существует и равен нулю.

Задача 6.3. Пусть $\gamma : [0,a] \longrightarrow M$ – кратчайшая, а $\gamma(b) = p$, для какого-то $0 < b < a$. Докажите, что угол $\measuredangle_{\mathsf{sup}}(\gamma, p, \gamma)$ существует и равен π.

Задача 6.4. Пусть $M = V$ – нормированное векторное пространство, с метрикой $\nu(x - y)$, которая индуцирована нормой ν. Докажите, что эта метрика внутренняя, причем отрезки прямых являются кратчайшими.

Задача 6.5 (!). Докажите, что кратчайшая, соединяющая две точки в нормированном векторном пространстве, единственна тогда и только тогда, когда сфера $\{x \in V \mid \nu(x) = 1\}$ не содержит нетривиальных отрезков.

Задача 6.6. Пусть $\alpha : [0,a] \longrightarrow M$, $\beta : [0,b] \longrightarrow M$ две геодезические в метрическом пространстве M, $\alpha(0) = \beta(0) = p$. Докажите, что

$$\measuredangle(\alpha, p, \beta) := \lim_{t,s\to 0} \arccos\left(\frac{s^2 + t^2 - d(\alpha(t), \beta(s))^2}{2st}\right).$$

Задача 6.7. Пусть $\alpha = \mathbb{R}^{\geqslant 0}a$, $\beta = \mathbb{R}^{\geqslant 0}b$ – два луча в нормированном пространстве (V, ν), причем угол $\measuredangle(\alpha, 0, \beta)$ существует. Докажите, что

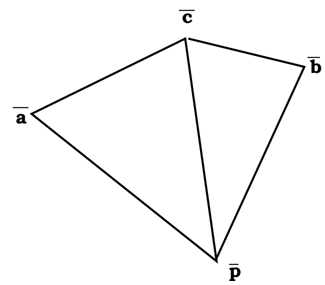
$$\frac{\mu^2\nu(a)^2 + \lambda^2\nu(b)^2 - \nu(\mu a - \lambda b)^2}{\mu\lambda} = \mathrm{const}$$

постоянная, не зависящая от μ и $\lambda \in \mathbb{R}^{\geqslant 0}$.

Задача 6.8 (!). Пусть $\alpha = \mathbb{R}^{\geqslant 0}a$, $\beta = \mathbb{R}^{\geqslant 0}b$, $\gamma = \mathbb{R}^{\geqslant 0}c$ – три разных луча в нормированном пространстве (V, ν), причем углы $\measuredangle(\alpha, 0, \beta)$, $\measuredangle(\alpha, 0, \gamma)$ и $\measuredangle(\beta, 0, \gamma)$ существуют. Предположим, что они лежат в одной плоскости. Докажите, что ν – евклидова метрика на подпространстве, порожденном a и b.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 6.9. Пусть $\gamma_i : [0, d_i] \longrightarrow M$ – пути в M, причем $\gamma_i(0) = p$, $a = \gamma_1(s), b = \gamma_3(t)$, $c = \gamma_2(u)$, и каждый γ_i нетривиален в любой окрестности 0. Рассмотрим треугольники сравнения $\triangle(\bar{p}, \bar{a}, \bar{c})$ и $\triangle(\bar{p}, \bar{c}, \bar{b})$, и нарисуем их на плоскости, с общей стороной $|\bar{p}, \bar{c}|$, чтобы они лежали по разные стороны от прямой $(\bar{p}, \bar{c})$.



Докажите, что для любых достаточно малых s, t, можно подобрать u таким образом, что $\bar{c}$ лежит на отрезке $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Указание. Воспользуйтесь непрерывностью γ_i.

Задача 6.10 (!). В условиях предыдущей задачи, докажите, что

$$\measuredangle(\gamma_1, p, \gamma_2) + \measuredangle(\gamma_2, p, \gamma_3) \geqslant \measuredangle(\gamma_1, p, \gamma_3)$$

если все эти углы существуют.

Указание. Убедитесь, что $\theta(apc) + \theta(bpc) \geqslant \theta(apb)$, для a, b, c, p, выбранных, как в предыдущей задаче.

Задача 6.11. В условиях задачи 6.9, верно ли, что $\theta(apc) + \theta(bpc) = \theta(apb)$? Мы считаем, что s, t, u выбраны таким образом, чтобы $\bar{c}$ лежала на отрезке $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Задача 6.12 (*). Докажите, что

$$\measuredangle_{\mathsf{sup}}(\gamma_1, p, \gamma_2) + \measuredangle_{\mathsf{sup}}(\gamma_2, p, \gamma_3) \geqslant \measuredangle_{\mathsf{sup}}(\gamma_1, p, \gamma_3)$$

(в этой задаче, углы не обязательно существуют).

Задача 6.13 (!). Докажите, что $\measuredangle_{\mathsf{sup}}(\gamma_1, p, \gamma_2) + \measuredangle_{\mathsf{sup}}(\gamma_2, p, \gamma_3) = 0$ влечет $\measuredangle_{\mathsf{sup}}(\gamma_1, p, \gamma_3) = 0$.

Определение 6.4. Путь $\gamma : [0, a] \longrightarrow M$ **имеет направление**, если угол $\measuredangle(\gamma, \gamma(0), \gamma)$ существует. Пути $\alpha, \beta : [0, a] \longrightarrow M$, $\alpha(0) = \beta(0) = p$ **имеют одинаковое направление**, если $\measuredangle_{\mathsf{sup}}(\alpha, p, \beta) = 0$.

Задача 6.14. Предположим, что $\gamma: [0,a] \longrightarrow M$ имеет направление. Докажите, что тогда $\measuredangle(\gamma, \gamma(0), \gamma) = 0$.

Задача 6.15. Докажите, что соотношение «$\alpha \sim \beta$, если $\measuredangle_{\mathsf{sup}}(\alpha, p, \beta) = 0$» задает отношение эквивалентности на множестве всех путей

$$\gamma: [0,a] \longrightarrow M, \quad \gamma(0) = p,$$

имеющих направление.

Определение 6.5. Пространство направлений в точке p есть множество классов эквивалентности путей $\gamma: [0,a] \longrightarrow M$, $\gamma(0) = p$, нетривиальных в любой окрестности 0 и имеющих направление, по отношению $\sim$, заданному выше.

Задача 6.16. Докажите, что $\measuredangle_{\mathsf{sup}}(\alpha, p, \beta)$ задает метрику на пространстве направлений.

Задача 6.17 (*). Докажите, что пространство направлений для $\mathbb{R}^n$ изометрично $(n-1)$-мерной сфере.

6.2. Произведения и конусы

Задача 6.18. Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) – метрические пространства. Рассмотрим функцию $d: (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0} \cup \infty$:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}.$$

а. Докажите, что d это метрика.

б. (!) Докажите, что d строго внутренняя, если d_X, d_Y – строго внутренние.

в. (*) Докажите, что d внутренняя, если d_X, d_Y – внутренние

Указание. Докажите наличие середин в $X \times Y$, и примените их наличие, чтобы построить кратчайшие.

Определение 6.6. Эта метрика называется **метрикой произведения**, а $(X \times Y, d)$ – **прямым произведением** метрических пространств.

Задача 6.19. Пусть ν – норма на $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющая $\nu(x,y) \geqslant \nu(x',y') \forall x' \leqslant x, y' \leqslant y$ (то есть монотонная по каждой координате), а d_ν – функция на $(X \times Y) \times (X \times Y)$, заданная формулой $d_\nu((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \nu(d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2))$.

а. Докажите, что d_ν это метрика.

б. (*) Докажите, что d_ν – строго внутренняя метрика, если d_X, d_Y – строго внутренние.

Определение 6.7. **Диаметр** метрического пространства M есть число $\sup_{x,y\in M} d(x,y)$.

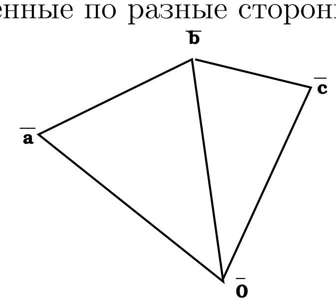
Определение 6.8. Пусть (X,d) – метрическое пространство, $\operatorname{diam} X \leqslant \pi$. Рассмотрим топологическое пространство $C(X)$ с топологией фактора, полученное из $X\times[0,\infty[$ склеиванием $X\times\{0\}$ в точку. Определим функцию $d_C:\ C(X)\times C(X)\longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ по формуле

$$d(p,q)=\sqrt{t^2+s^2-2ts\cos(d(x,y))},$$

где $p=(x,t), q=(y,s)$. В скором времени будет доказано, что d_C есть метрика. Пространство $C(X)$ с вышеописанной метрикой называется **метрическим конусом**, или просто **конусом** над X.

Задача 6.20. Пусть $(\alpha,t),(\beta,s)$ – точки в конусе $C(X)$, а $\triangle(\bar 0,\bar a,\bar b)$ – треугольник сравнения со сторонами t,s и углом $\measuredangle(\bar a,\bar 0,\bar b)=d(\alpha,\beta)$. Докажите, что $d_C(a,b)=|\bar a,\bar b|$.

Задача 6.21. Пусть $a=(\alpha,r), b=(\beta,s), c=(\gamma,t)$ – три точки на $C(X)$, а $\triangle(\bar 0,\bar a,\bar b)$, $\triangle(\bar 0,\bar b,\bar c)$ соответствующие треугольники сравнения, с общей стороной $[\bar 0,\bar b]$, и отложенные по разные стороны от $(\bar 0,\bar b)$.



Докажите, что $d(a,c)\leqslant|\bar a,\bar c|$, если $d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma)\leqslant\pi$.

Задача 6.22 (!). Пусть $C(X)$ – метрический конус, d_C – функция, определенная выше. Докажите, что это метрика.

Указание. Воспользуйтесь задачей 6.20 и задачей 6.21. Отдельно разберите случа $d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma)\geqslant\pi$.

Задача 6.23 (!). Пусть X – пространство со строго внутренней метрикой. Докажите, что метрика на $C(X)$ тоже строго внутренняя.

Задача 6.24. Пусть $C(X)$ – метрический конус, а $x \in X$. Докажите, что путь $\gamma: [0,a] \longrightarrow C(X)$, переводящий s в (x,s) – кратчайшая.

Задача 6.25. Пусть $x,y \in X$, а $\gamma_1 := (x,[0,a])$, $\gamma_2 := (y,[0,b]) \subset C(X)$ – соответствующие кратчайшие в конусе. Докажите, что $\measuredangle(\gamma_1, 0, \gamma_2) = d(x,y)$.

6.3. Конус пространства с $\operatorname{diam} > \pi$.

Задача 6.26. Пусть (X,d) – метрическое пространство, $a > 0$, а $d_a(x,y) = \min(d(x,y),a)$. Докажите, что $d_a(x,y)$ – метрика.

Задача 6.27. Пусть d – внутренняя метрика, и d_a тоже. Докажите, что $d = d_a$.

Определение 6.9. Сейчас мы определим метрический конус $C(X)$ для ситуации, когда $\operatorname{diam}(X) > \pi$. Пусть (X,d) – метрическое пространство, d_π – метрика на X, определенная выше. Определим $(C(X), d_C)$ как конус над (X, d_π).

Задача 6.28 (*). Пусть (X,d) – пространство с внутренней метрикой. Докажите, что метрика d_C на $C(X)$ тоже внутренняя.

Определение 6.10. Полиэдральное метрическое пространство размерности 2 – это фактор метрического графа и объединения выпуклых многоугольников с евклидовой метрикой, полученный склеиванием сторон многоугольников с ребрами графа по непрерывному отображению из границы многоугольника в граф, задающему изометрию между сторонами многоугольника и соответствующими ребрами графа. Оно **локально конечно**, если у каждой точки есть окрестность, изометричная конечному полиэдральному пространству (с конечным числом многоугольников).

Задача 6.29 (*). Пусть (Z,d) – двумерное полиэдральное локально конечное метрическое пространство. Докажите, что у каждой точки $z \in Z$ есть окрестность, изометричная окрестности нуля в конусе над метрическим графом.