# Гиперболические группы 11: задачи для экзамена

Каждому студенту выдается по $12 - t$ задач, где $t = \min(12 - 0.2 * k, 4)$, а $k$ количество баллов за задачи (если какие-то листки сданы частично, сумма баллов дополнительно округляется вверх, и $k$ увеличивается, по усмотрению экзаменатора, то есть меня). Задачи выдаются из тех разделов, которые студент мало сдавал. Каждая сданная на экзамене задача приносит 5 баллов. Суммарная оценка за курс выставляется по формуле $3 + \lceil 0.1b \rceil$ (10-балльная система) и $\lceil 1.5 + 0.05b \rceil$ (5-балльная), $b$ – сумма баллов.

Задачи сдаются устно, но студент должен приготовить краткую запись решения.

Можно пользоваться любой литературой, но требуется знать в общих чертах доказательство любого используемого утверждения и все подробности определений.

## 11.1. Метрические пространства и внутренние метрики (листки 1-3,5)

**Задача 11.1.** Докажите, что каждое метрическое пространство допускает изометрическое вложение в нормированное векторное пространство.

**Задача 11.2.** Пусть $M$ – метрическое пространство. Постройте метрику $d'$ на $M$, индуцирующую ту же топологию, и такую, что $\operatorname{diam}(d') < \infty$.

**Определение 11.1. Гильбертово пространство** есть полное нормированное векторное пространство с евклидовой метрикой $L^2$ (гильбертово пространство может быть бесконечномерным или конечномерным).

**Задача 11.3.** Пусть $M \xrightarrow{\phi} M'$ – изометрия (вещественных) гильбертовых пространств. Докажите, что $\phi$ есть композиция линейной изометрии и сдвига.

**Задача 11.4.** Пусть $L^1$ есть норма на $\mathbb{R}^n$, заданная суммой модулей координат. Докажите, что $(\mathbb{R}^n, L^1)$ не изометрично $(\mathbb{R}^n, L^2)$ для $n > 1$.

**Задача 11.5.** Пусть $X$ – топологическое пространство, а $\{d_i\}$ – набор метрик, согласованных с топологией. Предположим, что $d_i : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ равномерно сходится к $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$. Докажите, что $d$ индуцирует на $X$ ту же самую топологию.

**Задача 11.6.** Пусть $(M, d)$ – пространство с внутренней метрикой, $A \subset M$ – связное открытое подмножество. Докажите, что на $A$ существует внутренняя метрика $d'$, такая, что у каждой точки $a \in A$ есть окрестность $U$, такая, что $d'\big|_U = d\big|_U$.

**Задача 11.7.** Пусть $X$ – компактное топологическое пространство, а $\{d_i\}$ – набор метрик, согласованных с топологией. Предположим, что $d_i : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ равномерно сходится к $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, а все метрики $d_i$ внутренние. Докажите, что $d$ – тоже внутренняя метрика.

**Задача 11.8.** Пусть $X$ – пространство с внутренней метрикой, гомеоморфное отрезку. Докажите, что оно изометрично отрезку.

**Задача 11.9.** Пусть $X$ – пространство с внутренней метрикой, гомеоморфное окружности. Докажите, что не существует изометрического вложения $X \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

**Задача 11.10.** Пусть $f : M \longrightarrow N$ – отображение пространств с внутренней метрикой, которое сохраняет длины любых путей. Докажите, что это изометрия, или найдите контрпример.

## 11.2. Квазиизометрии и метрика слов на группе (листок 4)

**Определение 11.2.** Отображение $f: X \longrightarrow Y$ называется **билипшицевым с константой** $C$, или просто **билипшицевым**, если это биекция, причем $f$ и $f^{-1}$ $C$-липшицевы (то есть удовлетворяют $d(f(x), f(y)) \leqslant Cd(x,y)$).

**Определение 11.3.** **$\varepsilon$-сеть** в метрическом пространстве $M$ есть такое множество $N \subset M$, что объединение $\varepsilon$-шаров с центрами в $N$ равно $M$.

**Определение 11.4.** Пространства $X$ и $Y$ **квазиизометричны**, если для какого-то $\varepsilon$ в $X$ и в $Y$ существуют $\varepsilon$-сети $X_\varepsilon$ и $Y_\varepsilon$, между которыми есть билипшицево отображение.

**Определение 11.5.** Пусть $G$ – группа. Множество $S \subset G$ называется **набором образующих**, если все элементы $G$ выражаются через произведения элементов $x_i, x_j^{-1}$, для каких-то $x_i, x_j \in S$. Каждое такое произведение называется **словом** от $x_i, x_j^{-1}$. В дальнейшем, мы будем предполагать по умолчанию, что любой набор образующих $S$ содержит $x^{-1}$ вместе с каждым $x \in S$.

**Определение 11.6.** Пусть $G$ – группа, а $S \subset G$ – набор образующих. **Граф Кэли** $G$ есть метрический граф, полученный следующим образом. Вершины графа Кэли суть элементы $G$, а ребра соединяют две вершины $g, g'$, если $g' = gs$, где $s \in S$. Длины всех ребер графа Кэли равны 1.

**Определение 11.7.** Пусть $G$ – группа, а $S \subset G$ – набор образующих. **Метрика слов** $d_S$ на группе есть метрика на $G$ как на множестве вершин графа Кэли.

**Определение 11.8.** Две группы с заданными наборами образующих называются **квазиизометричными**, если квазиизометричны их графы Кэли.

**Задача 11.11.** Докажите, что $\mathbb{Z}^n$ с метрикой слов не квазиизометрична $\mathbb{Z}^m$, для $n \neq m$. Докажите, что $\mathbb{Z}^2$ не квазиизометрична свободной группе.

**Задача 11.12.** Пусть $A = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = b\rangle$ – группа, заданная образующими $a, b$ и соотношением $aba^{-1}b^{-1} = b$. Докажите, что количество вершин $|B_r(1)|$ в шаре радиуса $r$ растет быстрее любого полинома от $r$. Выведите из этого, что $A$ не квазиизометрична $\mathbb{Z}^n$ для любых $n$.

**Задача 11.13.** Пусть $\Gamma_0 \subset \Gamma$ – подгруппа конечного индекса. Докажите, что $\Gamma_0$ квазиизометрична $\Gamma$. Выведите из этого, что свободная группа $\mathbb{F}_3$ от трех образующих квазиизометрична $\mathbb{F}_2$.

**Указание.** Реализуйте $\mathbb{F}_3$ как подгруппу конечного индекса в $\mathbb{F}_2$.

**Задача 11.14.** Докажите, что $\mathbb{R}^2$ не квазиизометрично гиперболической плоскости (плоскости Лобачевского) $\mathbb{H}^2$.

**Задача 11.15.** Докажите, что бесконечномерное гильбертово пространство не квазиизометрично $\mathbb{H}^2$.

**Задача 11.16.** Пусть конечно-порожденная группа $\Gamma$ свободно и собственно действует изометриями на геодезическом пространстве $X$, а фактор $X/\Gamma$ компактен. Докажите, что $X$ квазиизометрично $\Gamma$ с метрикой слов.

## 11.3. Пространства Александрова (листки 6-8)

**Определение 11.9.** Пусть $a, b, c$ – точки в пространстве $(M, d)$ со строго внутренней метрикой, а $\gamma: [0, d(a, b)] \longrightarrow M$ – кратчайшая с геодезической параметризацией, соединяющая точки $a, b$. Рассмотрим функцию $d_c: [0, d(a, b)] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$, переводящую $t$ в $d(c, \gamma(t))$. Пусть $\triangle(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \subset \mathbb{R}^2$ – треугольник сравнения, а $d_{\bar{c}}: [0, d(a, b)] \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ – функция, переводящая $t$ в $d(\bar{c}, \bar{\gamma}(t))$, где $\bar{\gamma}: [0, d(a, b)] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ обозначает сторону треугольника сравнения с нормальной параметризацией. Функция $d_{\bar{c}}$ называется **функцией сравнения**. Пространство $M$ называется **пространством неотрицательной/неположительной кривизны в целом**, если для любых $a, b, c$, функция сравнения удовлетворяет неравенству $d_c \geqslant d_{\bar{c}}$ (соответственно, $d_c \leqslant d_{\bar{c}}$). Пространство $M$ называется **пространством Александрова неотрицательной/неположительной кривизны**, если у каждой точки есть окрестность неотрицательной/неположительной кривизны в целом. Пространства неположительной кривизны в целом также называются **CAT(0)-пространствами** (в честь Эли Картана, Д. А. Александрова и В. А. Топоногова; это название принадлежит М. Громову).

**Задача 11.17.** Докажите, что $\mathbb{R}^n$ с нормой $L^1$ не имеет ни неотрицательной, ни неположительной кривизны.

**Задача 11.18.** Пусть $M$ – векторное пространство с нормой, которое является пространством неотрицательной кривизны. Докажите, что эта норма евклидова.

**Определение 11.10.** Пусть $(X, d_X)$ и $(Y, d_Y)$ – метрические пространства. Рассмотрим метрику вида $d: (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0} \cup \infty$:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}.$$

Эта метрика называется **метрикой произведения**, а пространство $(X \times Y, d)$ – **произведением** метрических пространств.

**Задача 11.19.** Докажите, что произведение пространств неотрицательной кривизны – пространство неотрицательной кривизны.

**Задача 11.20.** Пусть $\mathbb{R}^2 \vee \mathbb{R}$ – букет евклидовых пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}$ с метрикой, полученной склейкой. Докажите, что это пространство неположительной кривизны.

**Задача 11.21.** Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ – евклидова плоскость с вырезанным из нее кругом. Докажите, что $M$ – пространство неположительной кривизны.

**Определение 11.11. Геодезическое пространство** есть пространство, любые две точки которого соединяются кратчайшей. **Пространство Адамара** есть полное, односвязное пространство Александрова неположительной кривизны, которое геодезично.

**Определение 11.12. Выпуклая функция** на геодезическом пространстве есть функция, которая выпукла на любой кратчайшей. **Выпуклое подмножество** есть подмножество, которое содержит вместе с любой парой точек любую соединяющую их кратчайшую.

**Определение 11.13.** Функция $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ на метрическом пространстве называется **$\lambda$-выпуклая**, если для любой геодезической $\gamma: [0, t] \longrightarrow M$, фукция $u \longrightarrow f(\gamma(u)) - \lambda u^2$ выпукла.

**Задача 11.22.** Докажите, что в пространстве Адамара расстояние до выпуклого множества – выпуклая функция.

**Задача 11.23.** Пусть $\lambda > 0$. Докажите, что любая $\lambda$-выпуклая функция на полном геодезическом пространстве имеет минимум.

**Задача 11.24.** Пусть $M$ – геодезическое пространство. Обозначим за $K_4(M) \subset \mathbb{R}^6$ подмножество в $\mathbb{R}^6$, образованное числами $|ab|, |ac|, |ad|, |bc|, |bd|, |cd|$ для всех четверок $\{a, b, c, d\} \subset M$. Предположим, что $K_4(M) \subset K_4(\mathbb{R}^2)$. Постройте изометрию между $M$ и выпуклым подмножеством $\mathbb{R}^2$.

**Задача 11.25.** Предположим, что $K_4(M) \subset K_4(\mathbb{H}^2)$. Постройте изометрическое вложение из $M$ в гиперболическую плоскость $\mathbb{H}^2$.

## 11.4. Пространства, гиперболические по Громову (листкок 9)

**Определение 11.14. Геодезический треугольник** $\triangle(abc)$ в метрическом пространстве есть треугольник, составленный из трех вершин $a, b, c$, соединенных кратчайшими, которые я буду обозначать за $[a, b], [b, c]$ и $[c, a]$. **Талия** треугольника есть супремум расстояния от точки $z$, лежащей на одной из сторон, до объединения двух других. Треугольник называется **$\delta$-тонким (по Рипсу)**, если его талия не больше $\delta$. Иначе говоря, каждая сторона такого треугольника лежит в $\delta$- окрестности двух других.

**Определение 11.15.** Метрическое пространство $X$ с внутренней метрикой называется **$\delta$-гиперболическим** (по Рипсу), если все геодезические треугольники $\delta$-тонкие. Будем говорить, что $X$ **гиперболично**, если оно $\delta$-гиперболично для какой-то константы $\delta$.

**Задача 11.26.** Пусть $M$ – геодезическое пространство, такое, что любая петля может быть стянута в точку внутри своей $\delta$-окрестности. Докажите, что $M$ гиперболично.

**Задача 11.27.** Пусть $a, b, c, d$ – четыре точки в $\delta$-гиперболическом геодезическом пространстве. Докажите, что существует дерево $T$ из пяти геодезических сегментов, соединяющих $a, b, c$ и $d$, такое, что $D$ лежит в $\delta$-окрестности $T$, а $T$ лежит в $\delta$-окрестности $D$.

**Задача 11.28.** Пусть $M$ $\delta$-гиперболическое, а $D$ – геодезический $2^n$-угольник. Докажите, что каждая его сторона лежит в $n\delta$-окрестности остальных сторон.

**Определение 11.16. $\varepsilon$-квазивыпуклое** подмножество геодезического пространства есть такое подмножество $Z \subset M$, что кратчайшая, соединяющая любые две точки $Z$, лежит в $\varepsilon$-окрестности $Z$.

**Задача 11.29.** Пусть $M$ – $\delta$-гиперболическое пространство, а $B_r(x)$ – шар радиуса $r$. Докажите, что он $\delta$-квазивыпуклый.

**Задача 11.30.** Пусть $x, y, z$ – точки на границе шара $B_r(s)$ в $\delta$-гиперболическом пространстве, причем расстояние $|xy| = |yz| = d < \frac{1}{10}r$. Докажите, что $|xz| \leqslant d + 4\delta$.

**Задача 11.31.** Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \longrightarrow M$ – бесконечные кратчайшие в $\delta$-гиперболическом пространстве, причем какая-то точка $\gamma_1$ отстоит от $\gamma_2$ на расстояние больше $2\delta$. Докажите, что $\lim_{t \longrightarrow \infty} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \infty$. и $\lim_{t \longrightarrow -\infty} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \infty$.