Комплексные пространства 12: ранг Реммерта

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим.

Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) одной – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 31 день после выдачи, 1, если между 31 и 50 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

12.1. Ранг Реммерта

Задача 12.1. (теорема о постоянном ранге)
Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное отображение, причем X гладко, а ранг $\mathsf{rk}\, F := \dim \operatorname{im} dF$ постоянный. Докажите, что у каждой точки $x \in X$ есть окрестность $U \ni x$, такая, что $F(U)$ – гладкое многообразие размерности $\mathsf{rk}\, F$, а слои $F^{-1}(z)$ – гладкие подмногообразия размерности $\ker dF$.

Указание. Теоремой о неявной функции воспользуйтесь.

Определение 12.1. Комплексно-аналитическое многообразие **равноразмерно**, если имеет одну и ту же размерность в каждой гладкой точке.

Задача 12.2. Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное отображение комплексных многообразий, которое собственно и имеет конечные слои.

а. Докажите, что существует гладкая точка $x \in X$, такая, что $F(x)$ – гладкая точка Y, а $dF\Big|_{T_xX}$ инъективно.

б. (!) Докажите, что $\dim X = \dim Y$, если Y равноразмерно.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 12.3 (!). Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – равноразмерное подмногообразие, которое пересекается с каким-то k-мерным подпространством $V \subset \mathbb{C}^n$ по непустому комплексно-аналитическому подмножеству размерности 0. Докажите, что $\dim Z \leqslant n-k$.

Указание. Докажите, что $\dim Z \leqslant \dim(Z \cap W) + 1$ для любой гиперплоскости $W \subset \mathbb{C}^n$, и воспользуйтесь индукцией.

Задача 12.4. Пусть $F: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ – голоморфная субмерсия, сохраняющая 0, а $Z \subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество окрестности 0, такое, что $F^{-1}(0) \cap Z = 0$. Докажите, что

а. существуют голоморфные замены координат в окрестности нуля на $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^m$, в которых F – комплексно-линейная проекция.

б. (!) F имеет конечные слои

в. (*) F собственно в окрестности нуля.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей, чтобу убедиться, что F имеет конечные слои, а регулярными координатами - чтобы усмотреть, что $F\Big|_Z$ собственно в небольшой окрестности 0.

Определение 12.2. Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное отображение комплексных многообразий. Определим **ранг Реммерта F в** x как $\operatorname{rk}_x F := \dim(X, x) - \dim(F^{-1}(F(x)), x)$.

Задача 12.5 (!). Пусть $\subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество в какой-то окрестности 0, содержащее $x \in \mathbb{C}$, $V \subset \mathbb{C}^n$ – аффинное подпространство коразмерности k, проходящее через x, а $F: \longrightarrow Y$ – голоморфное отображение. Предположим, что $\operatorname{rk}_x \left(F\Big|_{X\cap V}\right) = 0$. Докажите, что $\operatorname{rk}_x F \geqslant k$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 12.3.

Задача 12.6 (!). В условиях предыдущей задачи, докажите, что $F^{-1}(F(x'))$ пересекается с V по конечному множеству для любого x' в окрестности x.

Указание. Воспользуйтесь задачей 12.4.

Задача 12.7. Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное отображение комплексных аналитических пространств, причем $\operatorname{rk}_x F = 0$ для какого-то $x \in X$. Докажите, что ранг Реммерта F зануляется в какой-то окрестности F.

Указание. Воспользуйтесь задачей 12.4.

Задача 12.8. Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное отображение комплексных аналитических пространств, причем $X \subset \mathbb{C}^n$, а $\operatorname{rk}_x F = k$. Докажите, что найдется аффинное подпространство $V \subset \mathbb{C}^n$ коразмерности k такое, что $x \in V$ и $\operatorname{rk}_x F\Big|_{X\cap V} = 0$.

Задача 12.9 (!). Докажите, что ранг Реммерта $\operatorname{rk}_x F$ полунепрерывен сверху как функция x.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей, задачей 12.7 и задачей 12.5.

Задача 12.10 (!). Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное отображение равноразмерных комплексных пространств. Докажите, что ранг Реммерта $\operatorname{rk}_x F$ достигает максимума на открытом, плотном множестве $x \in X$.

Указание. Сведите это утверждение к случаю $\operatorname{rk}_x F = 0$ и воспользуйтесь тем, что размерность X и Y постоянна во всех гладких точках.

12.2. Конечные морфизмы

Задача 12.11. Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное отображение комплексных многообразий одинаковой размерности. Докажите, что прообраз общей точки Y имеет размерность 0.

Указание. Воспользуйтесь теоремой о постоянном ранге.

Задача 12.12 (*). Пусть G – конечная группа, действующая на X, а $Y = X/G$. Докажите, что Y окольцовано пучком G-инвариантных голоморфных функций, которые задают на Y структуру комплексного многообразия.

Определение 12.3. Напомню, что морфизм $F: X \longrightarrow Y$ комплексных многообразий называется **конечным**, если у каждой точки x есть окрестность U такая, что $F(U)$ открыто, а $\mathcal{O}_U$ – конечно-порожденный модуль над $\mathcal{O}_{F(U)}$. Морфизм называется **собственным**, если прообраз любого компакта – компакт.

Задача 12.13 (*). Докажите, что любое собственное голоморфное отображение с конечными слоями конечно.

Задача 12.14 (*). Докажите, что любой конечный морфизм комплексных многообразий собственный и имеет конечные слои.

Задача 12.15 (!). Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – конечное отображение неприводимых комплексных многообразий. Докажите, что для каждого комплексного подмногообразия $X_1 \subset X$, его образ $F(X_1)$ конечен в Y.

Указание. Если вы знаете "теорему о спуске идеалов при конечных морфизмах", примените ее и воспользуйтесь теоремой Рюкерта о нулях. Если не знаете, примените основную теорему теории Галуа, и получите, что после замены X на его конечное накрытие, Y получается как фактор X по конечной группе, а $F(X_1)$– фактор X_1 по конечной группе.

12.3. Множество, где ранг Реммерта не максимален

Задача 12.16. Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное, бимероморфное, собственное отображение комплексных многообразий. Докажите, что образ комплексно-аналитического подмножества $Z \subset X$ комплексно-аналитический.

Указание. Докажите, что $F(Z)$ что задается как множество общих нулей набора мероморфных функций.

Задача 12.17 (!). Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – доминантный морфизм ростков d-мерных комплексных многообразий. Докажите, что существуют многообразия X_1, Y_1 бимероморфные X и Y, и коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & X_1 \arrow[d, "F_1"'] \\ Y \arrow[r] & Y_1 \end{tikzcd}$$

такая, что горизонтальные стрелки - бимероморфизмы, а F_1 конечно.

Указание. Постройте бимероморфные отображения $X \longrightarrow X_u$ и $Y \longrightarrow Y_u$ на разветвленные накрытия $\phi_X: X_u \longrightarrow C_d$, $\phi_Y: Y_u \longrightarrow \mathbb{C}_d$ и возьмите в качестве X_1 образ графика F в $X_u \times Y_u$. Воспользуктесь предыдущей задачей, чтобы доказать, что этот образ комплексно-аналитичен.

Задача 12.18. В условиях предыдущей задачи,

а. Пусть $Z \subset X$ – множество точек $x \in X$ таких, что $F^{-1}(F(x))$ имеет положительную размерность. Докажите, что Z содержится в множестве X_e, где у бимероморфного[1] отображения $X \longrightarrow X_1$ полюс (оно называется "исключительным множеством").

б. (!) Докажите, что образ X_e в X_1 комплексно-аналитичен.

в. Докажите, что образ X_e в Y_1 комплексно-аналитичен.

г. (!) Выведите из этого что $F(X_e)$ комплексно-аналитично в Y.

Задача 12.19 (!). Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное отображение комплексно-аналитических многообразий, а $Z \subset X$ – объединение всех слоев F ненулевой размерности. Докажите, что Z – комплексно-аналитическое подмножество X.

Указание. В условиях предыдущей задачи, рассмотрим ограничение F на X_e. Либо размерность общего слоя положительна, в этой ситуации докажите, что $X_e = X_1$. Либо общий слой нульмерен, и тогда можно применить индукцию по размерности X, и убедиться, что X_1 комплексно-аналитично в X_e.

[1] Бимероморфное значит: мероморфное и обратимое.

Задача 12.20 (!). Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – морфизм ростков комплексно-аналитических многообразий, а k есть максимум ранга Реммерта $\mathsf{rk}_x(F)$ по всем $x \in X$. Будем считать, что X есть росток подмножества в $\mathbb{C}^n$. Докажите, что существует линейная проекция $G: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^k$ такая, что ранг Реммерта отображения $F \times G: X \longrightarrow Y \times \mathbb{C}^k$ в общей точке X нулевой.

Указание. Воспользуйтесь теоремой о постоянном ранге.

Задача 12.21 (!). Пусть $F: X \longrightarrow Y$ голоморфное отображение комплексно-аналитических многообразий, а $Z \subset X$ объединение всех слоев F неминимальной размерности. Докажите, что Z – комплексно-аналитическое подмножество в X.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей, и примените задачу 12.19 к отображению $F \times G: X \longrightarrow Y \times \mathbb{C}^k$.

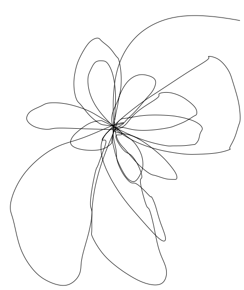
12.4. Теорема Реммерта о ранге

Задача 12.22. Пусть $Z \subset \mathbb{C}^2$ – множество нулей непостоянной голоморфной функции. Докажите, что существует линейная проекция $\pi: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ такая, что в какой-то окрестности нуля множество $Z \cap \pi^{-1}(t)$ конечно для любого $t \in \mathbb{C}$.

Указание. Воспользуйтесь подготовительной теоремой Вейерштрасса.

Задача 12.23 (!). Постройте голоморфное отображение $F: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2$ такое, что его образ не содержится ни в каком собственном комплексно-аналитическом подмножестве.

Указание. Постройте вещественно-аналитическую функцию $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, переводящую прямую в "ромашку с бесконечным числом лепестков" в $\mathbb{R}^2$, которая проходит через 0 бесконечное количество раз. Потом продолжите эту функцию до голоморфной функции на $\mathbb{C}$, и выведите из предыдущей задачи, что на образе f не зануляется никакая голоморфная функция.



бесконечная ромашка

Задача 12.24 (*). Постройте голоморфное отображение $F: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2$ такое, что его образ плотен (в обычной топологии).

Замечание 12.1. Из алгебраической геометрии, известно, что образ алгебраического многообразия размерности d при морфизме комплексных алгебраических многообразий содержится в многообразии размерности d. В силу предыдущих контрпримеров, аналогичную оценку на "размерность образа голоморфного отображения", вообще говоря, дать нельзя. Теорема Реммерта о ранге утверждает, что локально существует оценка, аналогичная известной из алгебраической геометрии: если X d-мерно, образ $F(X)$ можно покрыть счетным объединением d-мерных подмногообразий (думайте о них как о лепестках ромашки на картинке выше).

Задача 12.25. Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное отображение комплексно-аналитических многообразий, а $X_0 \subset X$ множество всех гладких точек $x \in X$, где ранг $\mathsf{rk}_x F$ максимален.

а. Докажите, что X_0 открыто и плотно в X.

б. Докажите, что его дополнение – комплексно-аналитическое подмножество в X.

Задача 12.26. Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – морфизм комплексных многообразий, причем $k = \sup_{x \in X} \mathsf{rk}_x F$.

а. Пусть $X_0 \subset X$ множество всех гладких точек $x \in X$, где ранг $\mathsf{rk}_x F$ максимален. Докажите, что $F(X_0)$ – счетное объединение гладких k-мерных подмногообразий.

б. (!) (теорема Реммерта о ранге)
Докажите, что $\operatorname{im} F$ лежит в счетном объединении комплексных многообразий размерности $\leqslant k$, по крайней мере одно из которых k-мерно.

Указание. Воспользуйтесь индукцией и выведите утверждение из теоремы Реммерта, примененной к отображению $F\Big|_{X \setminus X_0}$.