Комплексные пространства 2: Ростки пучка.

Правила: Зачеты по листкам бывают двух типов: когда сданы все (или или 2/3) задачи со звездочками, либо все (или 2/3) задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим k задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками или факториалом из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать и тем и другим.

Если сданы 2/3 задач со звездочками и (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) одной – $10t$ баллов.

Если сданы 2/3 задач без звездочки и с (!), студент получает $6t$ баллов, если все, кроме (максимум) двух – $10t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 31 день после выдачи, 1, если между 31 и 50 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту; просьба не терять ее, больше нигде результаты храниться не будут.

2.1. Прямой предел

Определение 2.1. **Коммутативная диаграмма** векторных пространств есть направленный граф (граф со стрелочками), где каждой вершине соответствует векторное пространство, каждой стрелочке линейный гомоморфизм, причем если из A в B можно придти по стрелочкам двумя способами, композиции соответствующих стрелочек равны.

Замечание 2.1. Под "окрестностью" X всегда понимается открытое множество, содержащее X.

Задача 2.1. Пусть $(M, \mathcal{F})$ - пространство, окольцованное пучком функций, $x \in M$ точка, а $\{U_i\}$ – множество всех окрестностей x. Нарисуем диаграмму, где вершины соответствуют всем U_i, а стрелочки из U_i в U_j соответствуют вложениям $U_j \hookrightarrow U_i$. Докажите, что пространства сечений $\mathcal{F}(U_i)$ со стрелочками, которые соответствуют ограничениям функций, образуют коммутативную диаграмму.

Определение 2.2. Пусть $\mathcal{C}$ - коммутативная диаграмма векторных пространств, A, B - векторные пространства, соответствующие двум вершинам диаграммы, а $a \in A, b \in B$ - элементы. Напишем $a \sim b$, если a и b переводятся в один и тот же элемент $d \in D$ композицией стрелочек из $\mathcal{C}$ (в частности, каждый элемент эквивалентен своему образу). Пусть $\sim$ - соотношение эквивалентности, порожденное такими $a \sim b$.

Задача 2.2. а. $A \xrightarrow{\phi} B$ диаграмма из двух пространств, и одной стрелочки. Докажите, что $b \sim b'$ равносильно $b = b'$ для любых $b, b' \in B$.

б. Пусть $A \xrightarrow{\phi} B$, $A \longrightarrow 0$ - диаграмма из трех пространств, и двух стрелочек, одно из которых нулевое, а ϕ - вложение. Докажите, что для каждого $b, b' \in B$, $b \sim b'$ равносильно $b - b' \in \operatorname{im}\phi$.

Определение 2.3. Пусть $\{C_i\}$ - множество пространств, сопоставленных вершинам коммутативной диаграммы $\mathcal{C}$, а $E \subset \bigoplus_i C_i$ - подпространство, порожденное векторами вида $(x - y)$, где $x \sim y$. Фактор $\bigoplus_i C_i / E$ называется **прямым пределом** диаграммы $\{C_i\}$, и еще **индуктивным пределом**, и еще **копределом** и **колимитом**, и обозначается $\lim\limits_{\rightarrow}$.

Задача 2.3. Пусть дана диаграмма вида $C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3 \longrightarrow ...$, где все стрелочки инъективны. Докажите, что $\lim\limits_{\rightarrow} C_i$ это объединение всех C_i.

Задача 2.4. Пусть дана диаграмма вида $C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3 \longrightarrow ... \longrightarrow C_n$. Докажите, что $\lim\limits_{\rightarrow} C_i = C_n$.

Задача 2.5. Приведите пример диаграммы вида $C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3 \longrightarrow \dots$ где все пространства C_i ненулевые, а копредел $\lim\limits_{\to} C_i$ нулевой.

Задача 2.6 (*). Приведите пример диаграммы вида $C_1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow C_3 \longrightarrow \dots$ где все пространства C_i ненулевые, все морфизмы тоже ненулевые, а копредел $\lim\limits_{\to} C_i$ нулевой.

Задача 2.7. Пусть $\mathcal{C}$ коммутативная диаграмма пространств C_i, причем на каждом C_i введена структура кольца, а все стрелки являются гомоморфизмами. Предположим также, что для любых двух вершин C_i, C_j диаграммы, найдутся стрелки диаграммы, ведущие из C_i, C_j в третью вершину C_k. Докажите, что $\lim\limits_{\to} C_i$ – тоже кольцо.

2.2. Кольцо ростков пучка функций

Определение 2.4. Пусть $M, \mathcal{F}$ - окольцованное пространство, $x \in M$ точка, а $\{U_i\}$ множество всех ее окрестностей. Рассмотрим коммутативную диаграмму, вершины которой пронумерованы $\{U_i\}$, а стрелочки U_i в U_j соответствуют вложениям $U_j \hookrightarrow U_i$ (в обратном направлении), каждой вершине U_i соответствует ее пространство сечений $\mathcal{F}(U_i)$, а стрелочкам - отображения ограничений. Прямой предел этой диаграммы называется **пространством ростков пучка $\mathcal{F}$ в точке** x.

Замечание 2.2. Поскольку гладкие функции, вещественно аналитические, непрерывные, C^i и так далее - пучки, кольца ростков гладких, вещественно аналитических и т. д. функций являются частными случаями вышеописанного.

Задача 2.8. Пусть на многообразии задан пучок функций, такой, что все его ростки равны нулю. Докажите, что это нулевой пучок.

Определение 2.5. Постоянный пучок $\mathbb{R}_M$ есть пучок функций, пространство сечений которого на каждом связном подмножестве $U \subset M$ равно $\mathbb{R}$.

Задача 2.9. Докажите, что кольцо ростков постоянного пучка в каждой точке равно $\mathbb{R}$.

Задача 2.10 (*). Пусть на многообразии M задан пучок $\mathbb{R}$-значных функций, такой, что все его ростки изоморфны $\mathbb{R}$. Докажите, что это постоянный пучок.

Определение 2.6. Идеал в кольце R есть абелева подгруппа $I \subsetneq R$, что для каждого $x \in R, a \in I$, произведение xa лежит в I.

Замечание 2.3. Факторпространство R/I тоже является кольцом (докажите это).

Определение 2.7. Максимальный идеал есть такой идеал $I \subset R$, что для любого другого идеала $I' \supset I$, имеем $I = I'$.

Задача 2.11. Докажите, что любой идеал содержится в максимальном (воспользуйтесь леммой Цорна).

Задача 2.12. Докажите, что идеал $I \subset R$ максимален тогда и только тогда, когда фактор R/I – поле.

Задача 2.13 (*). Найдите все максимальные идеалы в кольце гладких функций на компактном многообразии.

Определение 2.8. Кольцо называется **локальным**, если у него только один максимальный идеал.

Задача 2.14. Докажите, что кольцо рациональных чисел вида $\frac{m}{n}$, где m, n целые, а n нечетно, является локальным. Чему будет равен его фактор по максимальному идеалу?

Задача 2.15. Пусть F - кольцо рациональных функций (функций вида $\frac{P}{Q}$, где P и Q - полиномы), не имеющих полюса в нуле. Докажите, что это кольцо локально. Найдите фактор по максимальному идеалу.

Задача 2.16. Являются ли следующие кольца локальными?

а. Кольцо ростков гладких функций.

б. Кольцо ростков полиномиальных функций на $\mathbb{R}^n$

в. Кольцо ростков функций класса C^i, $i > 0$.

г. Кольцо ростков непрерывных функций.

д. Кольцо ростков вещественно аналитических функций.

Задача 2.17. Докажите, что кольцо с максимальым идеалом I локально тогда и только тогда, когда каждый элемент, не принадлежащий I, обратим.

Определение 2.9. Делители нуля в кольце есть такие ненулевые элементы r_1, r_2, что произведение $r_1 r_2$ равно нулю. **Нильпотент** есть элемент $r \in R$ такой что $r^n = 0$ для какого-то n.

Задача 2.18. Определите, если ли в следующих кольцах делители нуля и нильпотенты.

а. Кольцо ростков гладких функций.

б. Кольцо ростков вещественно аналитических функций.

в. Кольцо ростков непрерывных функций.

2.3. Кольцо ростков голоморфных функций

Определение 2.10. Кольцо ростков голоморфных функций на $\mathbb{C}^n$ есть кольцо ростков голоморфных функций в 0. Оно обозначается $\mathcal{O}_n$. Голоморфные функции также называются **аналитическими**, или **комплексно-аналитическими**.

Задача 2.19. Пусть f – голоморфная функция на шаре B, которая зануляется в каком-то открытом подмножестве B. Докажите, что $f = 0$.

Задача 2.20. Пусть $U \subset V$ – связные открытые подмножества комплексного многообразия, а $H^0(\mathcal{O}_U)$, $H^0(\mathcal{O}_V)$ обозначает кольца голоморфных функций на U, V. Докажите, что отображение ограничения $H^0(\mathcal{O}_U) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_V)$ инъективно.

Определение 2.11. Кольцо называется **конечно-порожденным над кольцом** R, если оно изоморфно факторкольцу кольца $R[t_1, ..., t_n]$, для какого-то $n \in \mathbb{Z}^{>0}$.

Задача 2.21 (*). Докажите, что кольцо $\mathcal{O}_n$ ростков голоморфных функций не конечно порождено над $\mathbb{C}$ для любого $n > 0$.

Определение 2.12. **Формальный степенной ряд** от переменных $t_1, ..., t_n$ есть сумма вида $\sum_{i=0}^{\infty} P_i(t_1, ..., t_n)$, где P_i – однородные полиномы степени i. Сложение на формальных степенных рядах определяется покомпонентно, произведение по формуле

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} P_i(t_1, ..., t_n)\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} Q_i(t_1, ..., t_n)\right) = \sum_{i=0}^{\infty} R_i(t_1, ..., t_n)$$

где $R_d(t_1, ..., t_n) = \sum_{i+j=d} P_i(t_1, ..., t_n) Q_j(t_1, ..., t_n)$.

Задача 2.22. Докажите, что формальные степенные ряды образуют кольцо. Кольцо формальных степенных рядов над полем k обозначается $k[[t_1, ..., t_n]]$.

Задача 2.23 (!). Постройте естественное вложение из кольца ростков $\mathcal{O}_n$ в $\mathbb{C}[[t_1, ..., t_n]]$.

Задача 2.24. Докажите, что в $\mathcal{O}_n$ нет делителей нуля.

Задача 2.25. Докажите, что кольцо формальных степенных рядов локально.

Задача 2.26. Докажите, что кольцо $\mathcal{O}_n$ ростков голоморфных функций локально.

Задача 2.27 (*). Докажите, что кольцо формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[t_1, ..., t_n]]$ не конечно порождено над кольцом $\mathcal{O}_n$.

2.4. Главная часть голоморфной функции

Определение 2.13. Пусть f – голоморфная функция на M, зануляющаяся в $0 \in B \subset \mathbb{C}^n$. Запишем ее ряд Тэйлора $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(t_1, ..., t_n)$, где P_i – однородные полиномы. Говорится, что **у f есть нуль кратности k в 0,** (или **порядка** k), если $P_0 = ... = P_{k-1} = 0$. В такой ситуации **главная часть** функции f есть однородный полином P_k.

Задача 2.28. Докажите, что кратность нуля не меняется при голоморфной замене координат.

Задача 2.29 (!). Пусть $\Phi(t_1, ..., t_n) = F_1(t_1, ..., t_n), ..., F_n(t_1, ..., t_n)$ – голоморфная замена координат в $0 \in \mathbb{C}^n$, а $A := \left(\frac{dF_i}{dt_j}\right)$ – ее дифференциал. Докажите, что

а. для любой голоморфной функции f в окрестности 0, такой, что $f(0) = 0$, функция $\Phi^*(f)$ имеет в нуле нуль той же кратности,

б. а ее главная часть получена из главной части f действием A.

Указание. Запишите Φ как композицию A и отображения вида

$$(t_1, ..., t_n) \longrightarrow G_1(t_1, ..., t_n), ..., G_n(t_1, ..., t_n),$$

где $G_i = t_i + P_i(t_1, ..., t_n)$, и P_i зануляются в нуле с порядком $\geqslant 2$.

Задача 2.30 (!). Пусть $f \in \mathcal{O}_n$ – росток голоморфной функции, имеющий нуль порядка k в 0. Докажите, что предел $\lim\limits_{z_n \to 0} \frac{F(0, z_n)}{z_n^k}$ конечен. Здесь и дальше $F(0, z_n)$ обозначает $F(0, 0, 0..., 0, z_n)$.

Задача 2.31 (!). Пусть Q есть главная часть функции F. Сделаем линейную замену координат таким образом, что полином $Q(z_1, ..., z_n)$ ненулевой при $z_1, ..., z_{n-1} = 0$. Докажите, что $\lim\limits_{z_n \to 0} \frac{F(0, z_n)}{z_n^k} \neq 0$.