Комплексные пространства, экзамен.

Правила: Для максимальной оценки нужно 120 очков, студент получает $k+2$ задачи, где $k = 12-t$, где t есть целая часть $n/10$, а n – число баллов за листочки. Суммарное число очков есть $b := n+10l$, где l – число сданных задач на экзамене, а суммарный балл – $\frac{b}{10}$ (округленный вниз).

1. Ростки и многообразия (листки 1-2).

Задача 1.1. Пусть X_1, X_2 – ростки комплексных многообразий. Рассмотрим фактор $X_1 \sim_Z X_2$, полученный отождествлением отмеченных точек в каждом из них. Докажите, что это росток комплексного многообразия.

Задача 1.2. Пусть $f: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ голоморфная функция, дифференциал которой в общей точке невырожден. Докажите, что f задает открытое отображение, или найдите контрпример.

Задача 1.3. Пусть G – конечная группа. Постройте комплексное многообразие M с фундаментальной группой G.

Задача 1.4. Рассмотрим двумерный тор $T := \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ с естественной комплексной структурой. Докажите, что T допускает непостоянные мероморфные функции.

2. Полиномы Вейерштрасса (листки 3-4).

Определение 2.1. Локальное кольцо R с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ называется **строго гензелевым**, если его поле вычетов алгебраически замкнуто, а каждый унитарный полином $P \in R[t]$, такой, что образ P в $R/\mathfrak{m}[t]$ не имеет кратных корней, имеет корень в R.

Задача 2.1. Докажите, что кольцо формальных рядов $\mathbb{C}[[t_1, ..., t_n]]$ строго гензелево.

Задача 2.2. Докажите, что кольцо ростков $\mathcal{O}_n$ строго гензелево.

Задача 2.3. Рассмотрим функцию $f(z) = wz^2 + (1+w^2)z + w(1+w^2)$ на $\mathbb{C}^2$ с координатами z, w. Вычислите ее полином Вейерштрасса.

Задача 2.4. Пусть $f \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ – полином Вейерштрасса, удовлетворяющий $f = gh$, где $g, h \in \mathcal{O}_n$. Докажите, что существует обратимое $u \in \mathcal{O}_n$ такое, что gu и hu^{-1} – тоже полиномы Вейерштрасса.

Задача 2.5. Пусть f есть функция на диске, такая, что $\int_{\partial S} f dz = 0$ для каждого прямоугольного треугольника S. Докажите, что f голоморфна, или найдите контрпример.

3. Nullstellensatz и нетеровость (листок 5).

Задача 3.1. Докажите, что кольцо степенных рядов $\mathbb{C}[[t_1, ..., t_n]]$ нетерово, или найдите контрпример.

Задача 3.2. Пусть M росток комплексного многообразия, а D – подмногообразие коразмерности 1. Докажите, что идеал V_D главный в $\mathcal{O}_M$, если M гладко, и приведите пример, когда это не так, для негладкого.

Задача 3.3. Пусть M – связное комплексное многообразие, допускающее непостоянную голоморфную функцию, а R – кольцо голоморфных функций на M. Докажите, что R не нетерово.

Задача 3.4. Пусть G – конечная группа, линейно действующая на $\mathbb{C}^n$ и сохраняющая росток подмногообразия Z в нуле. Докажите, что идеал Z в кольце ростков голоморфных функций порождается G-инвариантными функциями, или найдите контрпример.

4. Регулярные координаты (листок 8).

Задача 4.1. Пусть $V \subset \mathbb{C}^n$ – росток комплексно-аналитического подмножества в 0, заданного $k < n$ уравнениями. Докажите, что есть росток голоморфного отображения $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^k$, которое сюрьективно отображает V на росток $\mathbb{C}^k$ в 0.

Задача 4.2. Пусть f – голоморфная функция на гладком комплексном многообразии M, а $V(f)$ – ее множество нулей. Докажите, что для каждой точки $z \in V(f)$ есть окрестность $U \ni z$ такая, что пересечение $V(f) \cap U$ связно.

Задача 4.3. Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – подмногообразие, заданное как множество нулей неприводимого однородного полинома. Докажите, что его росток в нуле неприводим.

Задача 4.4. Пусть $P \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ полином Вейерштрасса, а Z – множество его нулей. Предположим, что множество гладких точек Z связно. Докажите, что P неприводим (то есть не делится на произведение двух необратимых полиномов Вейерштрасса).

5. Мероморфные отображения и размерность (листки 9-10).

Задача 5.1. Пусть f – непостоянная голоморфная функция на связном, гладком комплексном многообразии U, а V_f – ее множество нулей. Докажите, что $U \backslash V_f$ связно, но не односвязно.

Задача 5.2. Постройте односвязное комплексное многообразие M с точкой $m \in M$ такое, что фундаментальная группа дополнения $M \backslash \{m\}$ бесконечна и неабелева, или докажите, что такого не существует.

Задача 5.3. Пусть X, Y – компактные комплексные многообразия, $U \subset X, V \subset Y$ открытые, плотные подмножества, а $F: U \longrightarrow V$ голоморфное отображение, которое продолжается до мероморфного на X. Докажите, что замыкание графика F в $X \times Y$ комплексно аналитично.

Задача 5.4. Пусть X, Y – компактные комплексные многообразия, $U \subset X, V \subset Y$ открытые, плотные подмножества, а $F: U \longrightarrow V$ голоморфное отображение. Пусть замыкание графика F в $X \times Y$ комплексно аналитично. Докажите, что F продолжается до мероморфного отображения из X в Y.

Задача 5.5. Пусть $f: X \longrightarrow Y$ голоморфный и биективный морфизм ростков комплексных многообразий, где Y гладко. Докажите, что f обратим, или найдите контрпример.

6. Конечные морфизмы (листок 11).

Задача 6.1. Пусть X – комплексное многообразие, а R – кольцо локально ограниченных мероморфных функций на X. Докажите, что каждый элемент R является корнем унитарного многочлена над $\mathcal{O}_X$.

Задача 6.2. Пусть X – комплексное многообразие, а x – мероморфная функция на X, которая удовлетворяет уравнению $P(x) = 0$, где $P(x) \in \mathcal{O}_X[t]$ – унитарный полином. Докажите, что x локально ограниченна.

Задача 6.3. Пусть $Z \ni x$ – росток неприводимого комплексно-аналитического подмножества M в точке $x \in M$, а k – коразмерность Z в гладких точках. Докажите, что Z – одна из неприводимых компонент ростка комплексно-аналитического подмножества, заданного k уравнениями ("полного пересечения").

Задача 6.4. Пусть G – конечная группа, действующая на комплексном многообразии X. Докажите, что на X/G есть комплексная структура такая, что отображение $X \longrightarrow X/G$ голоморфно.

Задача 6.5. Приведите пример ростка многообразия X такого, что $\mathcal{O}_X$ целозамкнуто в своем поле частных, но X особо.

7. Теорема Реммерта (листок 12).

Задача 7.1. Пусть $A: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ – диагонализуемое линейное отображение, собственные значения которого удовлетворяют $|\alpha_i| > 1$, а $I \subset \mathcal{O}_n$ – идеал, который инвариантен относительно действия A. Докажите, что I порожден полиномами.

Задача 7.2. Предположим, что Z – неприводимое комплексно-аналитическое многообразие. Докажите, что $Z \backslash Z_{sing}$ линейно связно.

Задача 7.3. Пусть $Z \subset M$ – неприводимое комплексно-аналитическое подмножество, а x, y – гладкие точки. Докажите, что размерность Z в окрестности x такая же, как размерность в окрестности y.

Задача 7.4. Рассмотрим отображение $\Phi: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2$, переводящее z в $(z^2 - z, z^3 - z)$. Верно ли, что замыкание образа Φ комплексно-аналитично в окрестности (0,0)?