Комплексные аналитические пространства,

лекция 3: подготовительная теорема Веерштрасса

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

4 марта 2017

Формула Коши в размерности 1

Напомню, что **голоморфной функцией** на $M \subset \mathbb{C}$ с комплексной координатой z называется функция f такая, что $df \in \Lambda^{1,0}(M)$, что эквивалентно замкнутости формы fdz.

Формула Коши:

$$\int_{\partial\Delta} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi\sqrt{-1}\, f(a),$$

для функции f, голоморфной в диске $\Delta \subset \mathbb{C}$ и интегрируемой на его границе.

Доказательство. Шаг 1: Пусть S_ε есть окружность радиуса ε с центром в $a \in \Delta$, $B_\varepsilon(a)$ внутренность диска, а $\Delta_0 := \Delta \backslash B_\varepsilon(a)$. Теорема Стокса и замкнутость fdz дает

$$0 = \int_{\Delta_0} d\left(\frac{f(z)dz}{z-a}\right) = -\int_{S_\varepsilon} \frac{f(z)dz}{z-a} + \int_{\partial\Delta} \frac{f(z)dz}{z-a},$$

значит, **формула Коши следует, если мы докажем** $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi\sqrt{-1}\, f(a)$.

Формула Коши в размерности 1 (продолжение)

Формула Коши:

$$\int_{\partial\Delta} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi\sqrt{-1}\, f(a),$$

для функции f, голоморфной в диске $\Delta \subset \mathbb{C}$ и интегрируемой на его границе.

Доказательство. Шаг 1: Пусть S_ε есть окружность радиуса ε с центром в $a \in \Delta$. **Формула Коши следует, если мы докажем** $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi\sqrt{-1}\, f(a)$.

Шаг 2: Предполагая для упрощения $a = 0$ и параметризуя окружность S_ε кривой $t \longrightarrow \varepsilon e^{\sqrt{-1}\,t}$, мы получаем

$$\int_{S_\varepsilon} \frac{f(z)dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{f(\varepsilon e^{\sqrt{-1}\,t})}{\varepsilon e^{\sqrt{-1}\,t}} d(\varepsilon e^{\sqrt{-1}\,t}) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{f(\varepsilon e^{\sqrt{-1}\,t})}{\varepsilon e^{\sqrt{-1}\,t}} \sqrt{-1}\,\varepsilon e^{\sqrt{-1}\,t} dt = \int_0^{2\pi} f(\varepsilon e^{\sqrt{-1}\,t})\sqrt{-1}\, dt$$

при ε, стремящемся к 0, $f(\varepsilon e^{\sqrt{-1}\,t})$ стремится к $f(0)$, и этот интеграл стремится к $2\pi\sqrt{-1}\, f(0)$. ■

Формула Коши в произвольной размерности

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $M \subset \mathbb{C}^n$ открытое подмножество, а $z_1, ..., z_n$ комплексные координаты. Голоморфность функции f равносильна $df \in \Lambda^{1,0}(M)$, что эквивалентно $df \wedge dz_1 \wedge dz_1 \wedge ... \wedge dz_n = 0$. Обозначим $dz_1 \wedge dz_1 \wedge ... \wedge dz_n$ за Φ. Получаем, что f голоморфно $\Leftrightarrow$ форма $f\Phi$ замкнута.

ТЕОРЕМА: (формул Коши в размерности n)
Пусть $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ полидиск полирадиуса $(1, 1, ..., 1)$, то есть $\Delta = B_1(z_1) \times B_1(z_2) \times ... \times B_1(z_n)$, а $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Delta$ комплексные числа с $|\alpha_i| \leqslant 1$. Обозначим за S произведение окружностей радиуса 1, $S = S_1(z_1) \times S_1(z_2) \times ... \times S_1(z_n)$. Пусть f функция, голоморфная в полидиске. **Тогда $\int_S V = (2\pi\sqrt{-1}\,)^n f(\alpha_1, ...\alpha_n)$, где**

$$V = \frac{f\Phi}{(z_1 - \alpha_1)(z_2 - \alpha_2) \times ... \times (z_n - \alpha_n)}.$$

Доказательство. Шаг 1: Пусть $Z = \bigcup_{i=1}^n z_i = \alpha_i$, а S_ε – произведение окружностей радиуса ε с центром в $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Легко видеть, что $S, S_\varepsilon \subset \mathbb{C}^n \backslash Z$, и оба тора гомотопны в области $\mathbb{C}^n \backslash Z$, где форма V замкнута. $dV = 0$ и формула Стокса дает $\int_S V = \int_{S_\varepsilon} V$. **Осталось доказать, что $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} V = (2\pi\sqrt{-1}\,)^n f(\alpha_1, ...\alpha_n)$.**

Формула Коши в произвольной размерности (продолжение)

ТЕОРЕМА: Пусть $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ полидиск полирадиуса $(1,1,...,1)$, то есть $\Delta = B_1(z_1) \times B_1(z_2) \times ... \times B_1(z_n)$, а $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Delta$ комплексные числа с $|\alpha_i| \leqslant 1$. Обозначим за S произведение окружностей радиуса 1, $S = S_1(z_1) \times S_1(z_2) \times ... \times S_1(z_n)$. Пусть f функция, голоморфная в полидиске. **Тогда $\int_S V = (2\pi\sqrt{-1}\,)^n f(\alpha_1, ...\alpha_n)$, где $V = \frac{f dz_1 \wedge ... \wedge dz_n}{(z_1-\alpha_1)(z_2-\alpha_2)\times ... \times(z_n-\alpha_n)}$.**

Доказательство. Шаг 1: Пусть S_ε – произведение окружностей радиуса ε с центром в $\alpha_1, ..., \alpha_n$. **Осталось доказать, что $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{S_\varepsilon} V = (2\pi\sqrt{-1}\,)^n f(\alpha_1, ...\alpha_n)$.**

Шаг 2: Для упрощения обозначений мы положим $\alpha_i = 0$, и параметризуем S_ε кубом $[0, 2\pi]^n$ при посредстве отображения $t_1, ..., t_n \longrightarrow \varepsilon e^{\sqrt{-1}\,t_1}, ..., e^{\sqrt{-1}\,t_n}$. Это дает

$$
\begin{aligned}
\int_{S_\varepsilon} V = \int_{S_\varepsilon} f(z)\frac{dz_1}{z_1} \wedge ... \wedge \frac{dz_n}{z_n} = \\
= \int_0^{2\pi} ... \int_0^{2\pi} \frac{f(\varepsilon e^{\sqrt{-1}\,t_1})}{\varepsilon e^{\sqrt{-1}\,t_1}} ... \frac{f(\varepsilon e^{\sqrt{-1}\,t_n})}{\varepsilon e^{\sqrt{-1}\,t_n}} (\sqrt{-1}\,\varepsilon)^n e^{\sqrt{-1}\,t} dt_1 dt_2 ... dt_n = \\
= (\sqrt{-1}\,)^n \int_0^{2\pi} ... \int_0^{2\pi} f(\varepsilon e^{\sqrt{-1}\,t}) dt_1 dt_2 ... dt_n,
\end{aligned}
$$

и это сходится к $(2\pi\sqrt{-1}\,)^n f(\alpha_1, ...\alpha_n)$. ■

Разложение в ряд Тэйлора

ЗАМЕЧАНИЕ: Из формулы Коши легко следует, что **голоморфные функции, определенные в полидиске, раскладываются в этом полидиске в ряд Тэйлора.** Действительно,

$$f(\alpha_1, ...\alpha_n) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1}\,)^n} \int_S \frac{f dz_1 \wedge ... \wedge dz_n}{(z_1 - \alpha_1)(z_2 - \alpha_2) \times ... \times (z_n - \alpha_n)}$$

Раскладывая $(z_i - \alpha_i)^{-1}$ в ряд по формуле

$$\frac{1}{(z_i - \alpha_i)} = \frac{z_i^{-1}}{(1 - \alpha_i z_i^{-1})} = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_i^l z_i^{-l-1},$$

получаем

$$f(\alpha_1, ...\alpha_n) = \sum_{i_1=0}^{\infty} ... \sum_{i_n=0}^{\infty} \alpha_1^{i_1} ....\alpha_{i_n}^{i_n} \int_{S_\varepsilon} f(z_1, ..., z_n) z_1^{-i_1-1} ... z_n^{-i_n-1} dz_1 \wedge ... \wedge dz_n.$$

Кольцо ростков голоморфных функций (повторение)

ЛЕММА: ("принцип аналитического продолжения")
Пусть f – голоморфная функция на шаре B, которая зануляется в каком-то открытом подмножестве B. **Тогда $f = 0$.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите это.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $V \subset U$ – связные комплексные многообразия, а $H^0(\mathcal{O}_V)$, $H^0(\mathcal{O}_U)$ обозначает кольца голоморфных функций на U, V. **Тогда отображение ограничения $H^0(\mathcal{O}_U) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_V)$ инъективно.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кольцо ростков голоморфных функций есть множество классов эквивалентности голоморфных функций, определенных в окрестности x, с соотношением эквивалентности **"$f \sim g$, если $f = g$ в какой-то окрестности x"**.

Формальные степенные ряды (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Формальный степенной ряд** от переменных $t_1, ..., t_n$ есть сумма вида $\sum_{i=0}^{\infty} P_i(t_1, ..., t_n)$, где P_i – однородные полиномы степени i. Сложение на формальных степенных рядах определяется покомпонентно, произведение по формуле

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} P_i(t_1, ..., t_n)\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} Q_i(t_1, ..., t_n)\right) = \sum_{i=0}^{\infty} R_i(t_1, ..., t_n)$$

где $R_d(t_1, ..., t_n) = \sum_{i+j=d} P_i(t_1, ..., t_n) Q_j(t_1, ..., t_n)$.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **формальные степенные ряды образуют кольцо.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кольцо называется **локальным**, если в нем есть идеал I (называемый **максимальным идеалом кольца**) такой, что каждый элемент $a \notin I$ обратим.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **кольцо формальных степенных рядов локально.**

Ряды Тэйлора и ростки голоморфных функций (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – комплексное многообразие, $x \in M$ – точка, а $t_1, ..., t_n$ – комплексные координаты в некоторой окрестности x с нулем в x. С ростком голоморфной функции f в x свяжем формальный ряд

$$\sum_{i_1+i_2+...+i_n=r} \frac{d^r f}{dt_1^{i_1} dt_2^{i_2} ... dt_n^{i_n}} \cdot \frac{t_1^{i_1} t_2^{i_2} ... t_n^{i_n}}{i_1! i_2! ... i_n!}$$

Этот формальный ряд называется **ряд Тэйлора функции f**.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Ряд Тэйлора голоморфной функции f сходится к f в небольшой окрестности x.**

СЛЕДСТВИЕ: Взятие ряда Тэйлора **задает вложение кольца ростков $\mathcal{O}_{x,M}$ в кольцо формальных рядов в x.**

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **кольцо ростков голоморфных функций локально.**

ЗАМЕЧАНИЕ: В дальнейшем, **голоморфная функция** это то же самое, что **аналитическая функция** и **комплексно-аналитическая функция.**

Порядок нуля голоморфной функции (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть f голоморфная функция на M, зануляющаяся в $0 \in B \subset \mathbb{C}^n$. Запишем ее ряд Тэйлора $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(t_1, ..., t_n)$, где P_i – однородные полиномы. Говорится, что **у f есть нуль кратности k в 0,** (или **порядка k**), если $P_0 = ... = P_{k-1} = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Главная часть** голоморфной функции $f(t_1, ..., t_n)$ есть ненулевой однородный полином $Q(t_1, ..., t_n)$ степени d такой, что $f - Q$ имеет нуль кратности $\geqslant d + 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Главная часть, с точностью до действия линейного оператора, не зависит от замены координат.** Иначе говоря, **главная часть голоморфной функции в x однозначно определена как однородный полином на касательном пространстве T_xM.**

Упражнение 1: Пусть F – аналитическая функция в окрестности нуля в $\mathbb{C}^n$, которая имеет в 0 нуль порядка k. Докажите, что **для любого выбора координат, предел $\lim\limits_{z_n \to 0} \frac{F(0, z_n)}{z_n^k}$ конечен.**

Упражнение 2: Пусть Q есть главная часть функции F. Сделаем линейную замену координат таким образом, что полином $Q(0, z_n)$ ненулевой. **Проверьте, что $\lim\limits_{z_n \to 0} \frac{F(0, z_n)}{z_n^k} \neq 0$.**

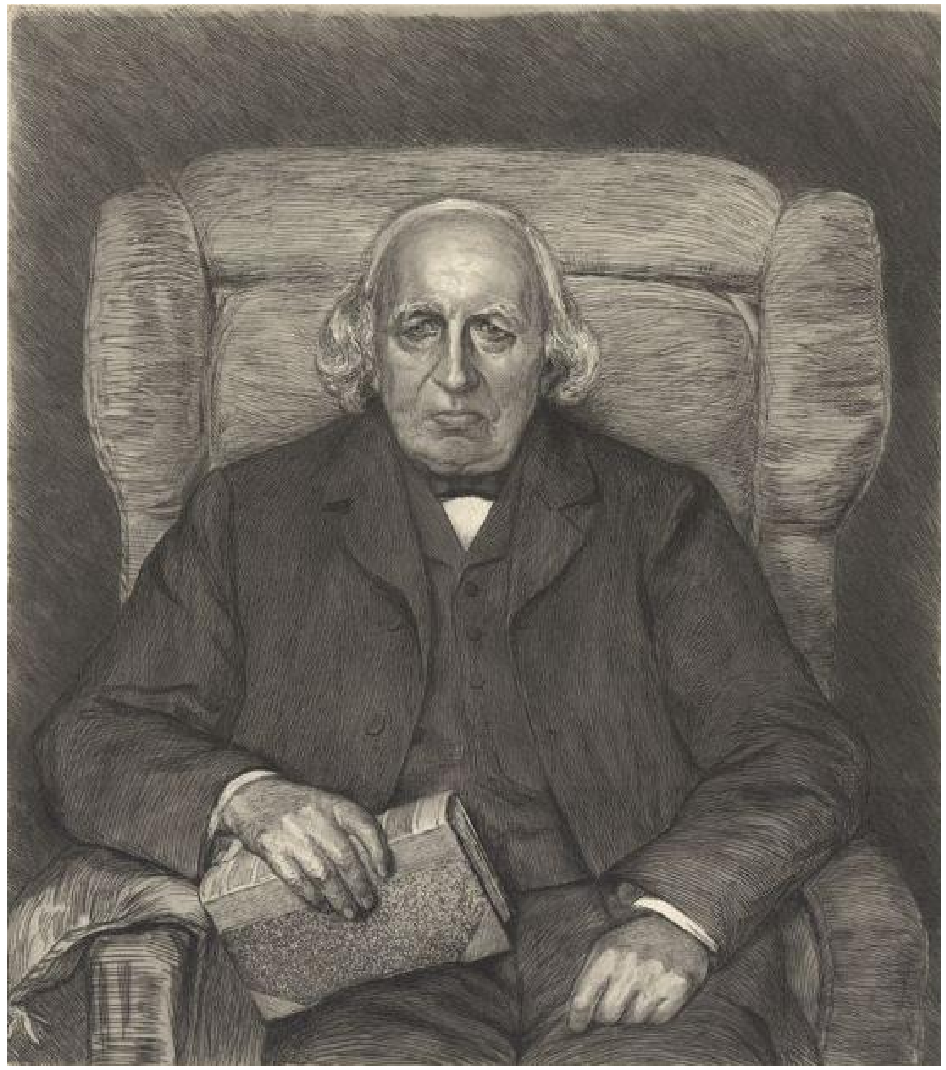
Подготовительная теорема Вейерштрасса (формулировка)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $z_1, ..., z_n$ – координаты на $\mathbb{C}^n$. **Полином Вейерштрасса** есть функция вида $A_0 + z_n A_1 + ... + z_n^k A_k$, где $A_i \in \mathcal{O}_{n-1}$ – аналитические функции, зависящие только от $z_1, ..., z_{n-1}$. Полином Вейерштрасса часто записывается в виде $P(z, z_n)$, где z обозначает совокупность координат $z_1, ..., z_{n-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Обозначим за $\mathcal{O}_{n-1}$ кольцо ростков голоморфных функций на $\mathbb{C}^{n-1}$ с координатами $z_1, ..., z_{n-1}$. Тогда **полиномы Вейерштрасса суть элементы кольца $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.**

ТЕОРЕМА: (Подготовительная теорема Вейерштрасса) Пусть F – аналитическая функция в окрестности 0 в $\mathbb{C}^n$, такая, что $\lim\limits_{z_n \to 0} \frac{F(0,z_n)}{z_n^k}$ имеет ненулевой предел в 0. **Тогда в какой-то окрестности 0, функцию F можно разложить как $F = u(z)P(z, z_n)$, где u обратима, а P – полином Вейерштрасса со старшим коэффициентом 1.** Более того, такое разложение единственно.

Доказательство потом



Karl Theodor Wilhelm Weierstraß
(1815 - 1897)

Подготовительная теорема Вейерштрасса (применимость)

ТЕОРЕМА: (Подготовительная теорема Вейерштрасса)
Пусть F – аналитическая функция в окрестности 0 в $\mathbb{C}^n$, такая, что $\lim\limits_{z_n\to 0} \frac{F(0,z_n)}{z_n^k}$ имеет ненулевой предел в 0. **Тогда в какой-то окрестности 0, функцию F можно разложить как $F = u(z)P(z, z_n)$, где u обратима, а P – полином Вейерштрасса со старшим коэффициентом 1.** Более того, такое разложение единственно.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из упражнений 1-2 следует, что **подготовительная теорема Вейерштрасса применима к любой комплексно-аналитической функции f, для которой $Q(z_n) \neq 0$, где Q есть главная часть f**. В частности, она становится применима после линейной замены координат $z_1, ..., z_n \longrightarrow A(z_1), ..., A(z_n)$, вне множества $A \in GL(n)$, имеющего меру 0.

СЛЕДСТВИЕ: Для любого счетного набора голоморфных функций $f_1, f_2, ...$, **существует система координат, в которой подготовительная теорема Вейерштрасса применима ко всем f_i.**

Формула Ньютона

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\alpha_1, ..., \alpha_l$ – набор независимых переменных, а e_i – коэффициенты многочлена $t^l + e_{l-1}t^{l-1} + ... + e_1 t + e_0 := \prod_{i=1}^l (t + \alpha_i)$. Тогда e_j называются **элементарными симметрическими полиномами** от α_i.

ТЕОРЕМА: **(Тождества Ньютона)**
Пусть $Q_j := \sum_i \alpha^j$. **Тогда элементарные симметрические полиномы $e_0, ..., e_{l-1}$ полиномиально выражаются через $Q_1, ..., Q_l$,** с рациональными коэффициентами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Имеет место **тождество Ньютона**:

$$ke_k = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i e_{k-i} Q_i.$$

Чтобы это усмотреть, напишем производящую функцию $E(t) := \prod_i (1 - t\alpha_i) = \sum_i (-1)^i t^i e_i$. Дифференцируя по t, получаем

$$\frac{E'(t)}{E(t)} = \sum_i \frac{-\alpha_i}{1 - t\alpha_i t} = -\sum_i \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_i^j t^{j-1}.$$

Пусть $Q(t) := \sum_{j=1}^{\infty} Q_j t^j$. Из предыдущей формулы получаем $tE' = -EQ$, что доказывает тождество Ньютона. ■

Нули логарифмической производной

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть f – голоморфная функция на диске, не зануляющаяся на его границе $\partial\Delta$, а $S_k(f) := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta}\frac{f'}{f}z^k dz$. **Тогда $S_k(f) = \sum \alpha_i^k$, где α_i – все нули f, взятые с кратностями.**

Указание: Формула Коши.

УПРАЖНЕНИЕ: Воспользуйтесь этим, чтобы доказать **теорему Руше:** если f_t – семейство голоморфных функций на диске Δ, непрерывно зависящих от параметра $t \in \mathbb{R}$ и не зануляющихся на $\partial\Delta$, то число нулей f_t в Δ постоянно.

Подготовительная теорема Вейерштрасса (объяснение)

ТЕОРЕМА: (Подготовительная теорема Вейерштрасса) Пусть F – аналитическая функция в окрестности 0 в $\mathbb{C}^n$, такая, что $\lim\limits_{z_n\to 0} \frac{F(0,z_n)}{z_n^k}$ имеет ненулевой предел в 0. **Тогда в какой-то окрестности 0, функцию F можно разложить как $F = u(z)P(z,z_n)$, где u обратима, а P – полином Вейерштрасса со старшим коэффициентом 1.** Более того, такое разложение единственно.

Для доказательства подготовительной теоремы Вейерштрасса, **мы рассматриваем множество нулей F как особое подмногообразие $\mathbb{C}^n$, которое снабжено k-листным разветвленным накрытием над $\mathbb{C}^{n-1}$**, и строим полином Вейерштрасса **с тем же множеством нулей.**

Это делается так: мы выписываем полиномы Ньютона от нулей функции $\tilde{F}_{z_1,...,z_{n-1}}(z_n) = F(z_1,...,z_n)$ как голоморфные функции от $z_1,...,z_{n-1}$, и выражаем элементарные симметрические полиномы от этих нулей через полиномы Ньютона, получая, что существует функция $P(z,z_n)$, полиномиальная по z_n, и зануляющаяся там же, где F, и с теми же кратностями.

Подготовительная теорема Вейерштрасса (доказательство)

Доказательство подготовительной теоремы Вейерштрасса: Поскольку $\frac{F(0,z_n)}{z_n^k}$ имеет ненулевой предел в 0, в некотором полидиске $\Delta(n-1,1) := B_r(z_1,...z_{n-1}) \times \Delta_{r'}(z_n)$ бирадиуса r, r', $F(z,z_n) \neq 0$, когда $|z_n| = r'$. В этом полидиске мы построим разложение $F = uP$.

Шаг 1: Пусть $\mathfrak{S}_k(z) := S_k(F(z,\cdot))$. где $z \in B_r(z_1,...z_{n-1})$, а $S_k(f) := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\partial\Delta}\frac{f'}{f}z^k dz$. В силу упражнения выше, $\mathfrak{S}_0(z)$ **равно числу нулей $F(z,\cdot)$ на диске $\Delta_{r'}$.** Поскольку $\mathfrak{S}_0(z)$ непрерывно зависит от z, **число нулей постоянно.**

Шаг 2: Пусть $e_l(z)$ – элементарные полиномы от этих нулей, обозначенных за $\alpha_i(z)$. В силу упражнения выше, сумма l-х степеней $\alpha_i(z)$ равна $\mathfrak{S}_l(z)$. **Воспользовавшись тождеством Ньютона, мы выразим $e_l(z)$ через $\mathfrak{S}_l(z)$, получив голоморфные функции от $z_1,...,z_{n-1}$.**

Шаг 3: Пусть $P(z,z_n) := z_n^k + \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i e_i(z) z^i$. Поскольку $P(z,z_n)$ имеет те же нули, что и F, и с теми же кратностями, их частное – гладкая функция u, которая не зануляется нигде в $\Delta(n-1,1)$, и голоморфна вне множества нулей F. Поскольку u дифференцируема, она голоморфна и обратима в $\Delta(n-1,1)$. Мы получили $F = Pu$. ■

Лемма Гаусса

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Элемент $r \in R$ кольца R **прост** если для любого делителя $r'|r$, либо r' обратим в R, либо частное r/r' обратимо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кольцо без делителей нуля, где однозначно разложение на простые сомножители, называется **факториальным**.

ТЕОРЕМА: ("Лемма Гаусса")
Пусть кольцо R факториально. **Тогда кольцо полиномов $R[t]$ тоже факториально.**

Доказательство будет дальше.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть R кольцо без делителей нуля. **Докажите, что кольцо полиномов $R[t]$ не имеет делителей нуля.**

Примитивные полиномы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть R – факториальное кольцо. Полином $P(t) \in R[t]$ называется **примитивным**, если НОД его коэффициентов равен 1.

Лемма 1: Пусть $P_1, P_2 \in R[t]$ примитивные полиномы. **Тогда их произведение тоже примитивно.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $p \in R$ простое. Поскольку P_1, P_2 примитивны, они ненулевые по модулю p. Поскольку факторкольцо $R/(p)$ не имеет делителей нуля, **произведение $P_1 1 P_2$ ненулевое в $R/(p)$, значит, НОД коэффициентов P_1P_2 не делит p.** ■

Лемма 2: Пусть R – факториальное кольцо, а K его поле частных. **Тогда каждый примитивный полином $P \in R[t]$, который неприводим в $R[t]$, неприводим в $K[t]$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Разложим P в произведение двух полиномов из $K[t]$. Приведя общие знаменатели, получим $rP = P_1P_2$, где $P_1, P_2 \in R[t]$. Поделив на НОД коэффициентов P_i, получим $rP = r'P_1'P_2'$, где полиномы P_1', P_2' примитивны. Но в этом случае $P_1'P_2'$ примитивный (Лемма 1). Получаем, что НОД коэффициентов полинома rP это r, а НОД коэффициентов $r'P_1'P_2'$ это r'; сократив на r, r', получим разложение P на множители в $R[t]$. ■

Лемма Гаусса (доказательство)

ТЕОРЕМА: ("Лемма Гаусса")
Пусть кольцо R факториально. **Тогда кольцо полиномов $R[t]$ тоже факториально.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Обозначим за K поле частных R. Разложение на множители единственно в кольце $K[t]$, потому что там действует алгоритм Евклида. В силу Леммы 2, для любого примитивного многочлена $P(t)$, у него столько же разложений на неприводимые в $K[t]$, сколько в $R[t]$. Непримитивный многочлен разлагается в произведение примитивного и НОДа его коэффициентов. ■

Факториальность кольца $\mathcal{O}_n$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $f \in \mathcal{O}_n$ – элемент кольца ростков голоморфных функций он n переменных. **Тогда f разлагается в произведение $f = f_1 ... f_N$ неразложимых функций,** причем **такое разложение единственно.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно доказать это, когда f – полином Вейерштрасса. Разложив f в произведение неприводимых полиномов, получим искомое разложение $f = f_1 ... f_N$. Осталось доказать единственность.

Шаг 1: Воспользовавшись индукцией, **можно считать, что $\mathcal{O}_{n-1}$ факториально.** Из этого, по лемме Гаусса, следует факториальность $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.

Шаг 2: Пусть g – неразложимый элемент, который делит произведение неразложимых элементов ff_1. Воспользовавшись подготовительной теоремой Вейерштрасса, можно считать, что f, f_1, g – полиномы Вейерштрасса в одной и той же системе координат. Тогда **g делит ff_1 в кольце $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.** Поскольку это кольцо факториально, из этого следует, что f либо f_1 делит g. ■