# Комплексная алгебраическая геометрия, контрольная за первый модуль

Каждому студенту выдается список задач для решения (7 штук), по одной задаче из каждого раздела. Списки задач составлены индивидуально с помощью рандомайзера. Если вас нет в списке, вам будет выдан вариант без имени; пожалуйста, сдайте вместе с решениями задач лист, где указан ваш вариант, с отметкой экзаменатора, и вашей фамилией. Число очков за это задание вычисляется по формуле $b = \min(40, 7s)$, где $s$ – число решенных задач. Решение письменное, сдается до 18:30 понедельника, 24 марта. Пожалуйста, сформулируйте (не опуская деталей) все нетривиальные теоремы, которыми вы пользуетесь, и укажите ссылку либо набросок доказательства.

## 2.1. Линейная алгебра

**Задача 2.1.** Докажите, что $SU(1,1)/\pm 1$ изоморфно $SO(1,2)$.

**Задача 2.2.** Пусть $V = \mathbb{C}^n$ комплексное векторное пространство, $h$ невырожденная псевдо-эрмитова форма (то есть $I$-инвариантная симметрическая форма без условия положительности), а $h_1$ псевдо-эрмитова форма на $V$. Докажите, что существует такой вектор $v \in V$, и $\lambda \in \mathbb{R}$, что $h(v,y) = \lambda h_1(v,y)$ для любого $y \in V$, или найдите контрпример.

**Задача 2.3.** Пусть $(V_1, h_1)$, $(V_2, h_2)$ евклидовы векторные пространства, а $V = V_1 \oplus V_2$. Рассмотрим скалярное произведение на $V$ (не обязательно положительно определенное) $h$ такое, что $h\Big|_{V_1} = h_1$ и $h\Big|_{V_2} = h_2$. Докажите, что существует число $C \in \mathbb{R}^{>0}$ такое, что скалярное произведение $h + Ch_1$ положительно определено.

**Задача 2.4.** Пусть $V = \mathbb{C}^2$ – комплексное векторное пространство с заданной на нем комплексной формой объема. Докажите, что пространство $\Lambda^{1,1}(V) = \mathbb{R}^4$ снабжено невырожденным скалярным произведением сигнатуры (3,1). Выведите из этого, что $SL(2,\mathbb{C})/\pm 1 = SO(3,1)$.

## 2.2. Грассманова алгебра

**Определение 2.1.** **Вещественная структура** $\tau$ на комплексном пространстве $(V, I)$ есть инволюция такая, что $\tau I \tau^{-1} = -I$.

**Задача 2.5.** Пусть $V = \mathbb{C}^4$ – 4-мерное эрмитово векторное пространство с заданной на нем комплексной формой объема. Постройте на $\Lambda^{2,0}(V)$ $SU(4)$-инвариантную вещественную структуру и $SU(4)$-инвариантную эрмитову форму.

**Задача 2.6.** Пусть $V = \mathbb{C}^n$, $H$ – множество эрмитовых форм на $V$, а $\Phi: \ H \longrightarrow \Lambda^{n-1,n-1}(M)$ отображение, переводящее $\eta$ в $\eta^{n-1}$. Докажите, что $\Phi$ инъективно.

**Задача 2.7.** Пусть $(V = \mathbb{R}^{2n}, \omega)$ – симплектическое векторное пространство, $W \subset V$ – $n$-мерное подпространство, а $\eta \in \Lambda^n W \subset \Lambda^n V$ соответствующий кососимметрический тензор. Докажите, что $\omega\big|_W = 0 \Leftrightarrow \eta \wedge \omega^\sharp = 0$, где $\omega^\sharp \in \Lambda^2 V$ – бивектор, двойственный к $\omega$.

**Задача 2.8.** Пусть $(V = \mathbb{R}^4, I)$ – 2-мерное комплексное векторное пространство, $W \subset V$ – 2-мерное вещественное подпространство, $\eta \in \Lambda^2_{\mathbb{R}} W \subset \Lambda^2_{\mathbb{R}} V$ соответствующий кососимметрический бивектор, а $\Omega \in \Lambda^2_{\mathbb{C}} V$ ненулевой комплексно-линейный кососимметрический бивектор. Докажите, что $\Omega \wedge \eta = 0$ тогда и только тогда, когда $I(W) = W$.

## 2.3. Почти комплексные структуры

**Задача 2.9.** Постройте $SO(2n)$-инвариантную почти комплексную структуру на $SO(2n)/U(n)$, и докажите, что она интегрируема.

**Задача 2.10.** Постройте $SO(2n)$-инвариантную симплектическую структуру на $SO(2n)/U(n)$.

**Задача 2.11.** Постройте $U(n)$-инвариантную почти комплексную структуру на $U(n,1)/U(n)$, и докажите, что она интегрируема.

**Задача 2.12.** Постройте $U(n)$-инвариантную симплектическую структуру на $U(n,1)/U(n)$.

## 2.4. Связности без кручения

**Задача 2.13.** Пусть $\Xi$ – тензор на многообразии $M$, причем у каждой точки найдется окрестность и на ней связность без кручения, такая, что $\nabla(\Xi) = 0$. Докажите, что на $M$ найдется связность без кручения, такая, что $\nabla(\Xi) = 0$.

**Определение 2.2.** Пусть $\nabla : \Lambda^1(M) \longrightarrow \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^1(M)$ связность на многообразии. Определим оператор $\operatorname{Hess}^k_\nabla : C^\infty \longrightarrow \Lambda^1(M)^{\otimes k}$ как $\operatorname{Hess}^k(f) := \nabla^{k-1}(df)$.

**Задача 2.14.** Пусть $\nabla$ – связность без кручения. Докажите, что $\operatorname{Hess}^k f$ – симметрическая $k$-форма, для любой функции $f$.

**Замечание 2.1.** Из-за этого результата, связности без кручения еще называют **симметрическими**.

**Задача 2.15.** Найдите группу голономий сферы $S^3$ с обычной метрикой.

**Задача 2.16.** Пусть $X$ – нигде не зануляющееся векторное поле на многообразии. Постройте связность $\nabla$ без кручения, такую, что $\nabla(X) = 0$.

**Задача 2.17.** Пусть $M$ – ориентируемое двумерное многообразие, а $B_1, B_2 \subset TM$ одномерные ориентируемые подрасслоения, такие, что $B_1 \oplus B_2 = TM$. Постройте связность $\nabla$ без кручения, такую, что $\nabla(B_1) \subset B_1 \otimes \Lambda^1 M$ и $\nabla(B_2) \subset B_2 \otimes \Lambda^1 M$.

## 2.5. Комплексный анализ

**Задача 2.18.** Пусть на почти комплексном многообразии $(M, I)$ задана голоморфная функция $f$, такая, что $|f| = \mathsf{const}$. Докажите, что $f$ постоянна.

**Задача 2.19.** Пусть $X$ – почти комплексное многообразие. Докажите, что множество неподвижных точек $X_\iota$ антикомплексной инволюции – гладкое многообразие, причем $\dim_{\mathbb{R}} X_\iota = \dim_{\mathbb{C}} X$.

**Задача 2.20.** Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ – компактная область с гладкой границей, а $f$ – голоморфная функция на $D$, которая непрерывна и вещественна на границе $D$. Докажите, что $f$ постоянна.

**Задача 2.21.** Пусть $f$ – голоморфная функция на кэлеровом многообразии $(M, \omega)$ размерности $n$. Докажите, что $\int_M dd^c(|f|^2 \wedge \omega^{n-1}) \geqslant 0$, и равенство возможно, только если $f = \mathsf{const}$. Выведите из этого, что на компактном кэлеровом многообразии все голоморфные функции постоянны.

**Задача 2.22.** Пусть $M$ – комплексное многообразие, $\nabla$ – связность без кручения, сохраняющая $I$, а $\phi$ – вещественная функция, такая, что симметрическая 2-форма $\operatorname{Hess}(\phi)$, полученная симметризацией $\nabla^2(\phi)$, положительно определена.[1] Докажите, что $dd^c\phi$ – кэлерова форма.

## 2.6. Топология кэлеровых многообразий

**Задача 2.23.** Пусть $M = S^3 \times S^3 \times S^2 \times S^1 \times S^1$. Докажите, что $M$ не допускает кэлеровой структуры.

**Задача 2.24.** Пусть $M = S^4 \times S^2 \times S^1 \times S^1$. Докажите, что $M$ не допускает кэлеровой структуры.

**Задача 2.25.** Пусть $M$ – кэлерово многообразие, а его алгебра когомологий изоморфна алгебре Грассмана с образующими $x_1, x_2, x_3, x_4$ степеней $d_1, d_2, d_3, d_4$. Докажите, что $d_i = 1$ для всех $i$.

**Задача 2.26.** Пусть $M$ – кэлерово многообразие, гомеоморфное произведению сфер размерности $d_1, ..., d_n$, причем все $d_i > 1$. Докажите, что $d_i = 2$ для всех $i$.

## 2.7. Алгебры суперсимметрий

**Задача 2.27.** Пусть $(M, I, \omega)$ – почти комплексное эрмитово многообразие, причем $d\omega = 0$. Найдите размерность супералгебры Ли, порожденной $L, \Lambda, d$, где $L(\eta) = \omega \wedge \eta$, а $\Lambda = *L*$, и опишите эту супералгебру.

**Задача 2.28.** Пусть $M$ – кэлерово многообразие, $\mathfrak{a}$ – супералгебра суперсимметрий $M$.[2] Найдите размерность супералгебры, порожденной $\mathfrak{a}$ и оператором $dd^c$, и опишите эту супералгебру.

**Задача 2.29.** Пусть $(M, I, \omega)$ – комплексное эрмитово многообразие. Докажите, что $[L, d^*]$ дифференцирование, или найдите контрпример.

**Задача 2.30.** Пусть $(M, I, \omega)$ – комплексное эрмитово многообразие. Докажите, что $\{\Lambda, [\Lambda, d]\} = 0$, или найдите контрпример.

[1] Такая функция называется **выпуклой**.

[2] Это супералгебра Ли размерности $(5|4)$, порожденная оператором Вейля, операторами Ходжа и дифференциалом де Рама.