Комплексная алгебраическая геометрия, листок 13: ростки подмногообразий

Правила: Если сдано больше 1/3 задач, студент получает $4t$ баллов, если больше 2/3 задач, $10t$ баллов, если все, кроме одной – $15t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

Задача 13.1. Назовем точку $z \in Z$ комплексно-аналитического подмножества $Z \subset M$ **гладкой**, если в какой-то окрестности z, Z биголоморфно шару. Докажите, что у любого комплексно-аналитического подмножества есть гладкие точки.

Задача 13.2. Пусть $Z \subset M$ – комплексно-аналитическое подмножество, а $Z_{sing} \subset Z$ – множество особых точек Z. Докажите, что Z_{sing} – тоже комплексно-аналитическое подмножество.

Задача 13.3. Предположим, что $Z \subset M$ – неприводимое комплексно-аналитическое подмножество. Докажите, что $Z \backslash Z_{sing}$ линейно связно.

Задача 13.4. Пусть $Z \subset M$ – неприводимое комплексно-аналитическое подмножество, а x, y – гладкие точки. Докажите, что размерность Z в окрестности x такая же, как размерность y.

Задача 13.5. Пусть $Z \ni x$ – росток неприводимого комплексно-аналитического подмножества M в точке $x \in M$, а k – коразмерность Z в гладких точках. Докажите, что Z – одна из неприводимых компонент ростка комплексно-аналитического подмножества, заданного k уравнениями ("полного пересечения").

Задача 13.6. Пусть $V \subset \mathbb{C}^n$ – росток комплексно-аналитического подмножества в 0, заданного $k < n$ уравнениями. Докажите, что есть росток голоморфного отображения $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^k$, которое сюрьективно отображает V на росток $\mathbb{C}^k$ в 0.

Задача 13.7. Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – компактное комплексно-аналитическое подмножество. Докажите, что Z конечно.