Комплексная алгебраическая геометрия, листок 12: подготовительная теорема Вейерштрасса

Правила: Если сдано больше 1/3 задач, студент получает $4t$ баллов, если больше 2/3 задач, $10t$ баллов, если все, кроме одной – $15t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

Определение 12.1. Локальное кольцо есть кольцо, у которого есть единственный максимальный идеал $\mathfrak{m}$. Локальное кольцо R называется **полным**, если для любой согласованной последовательности элементов $r_i \in R/\mathfrak{m}^i$ найдется $r \in R$ такой, что $r = r_i \mod \mathfrak{m}^i$.

Определение 12.2. Пусть $(R, \mathfrak{m})$ – локальное кольцо, а $R[[t]]$ – кольцо степенных рядов над R. Элемент $r = \sum r_i t^i \in R[[t]]$ называется **регулярным степени** k, если $r_k \notin \mathfrak{m}$, а $r_0, ..., r_{k-1} \in \mathfrak{m}$. Говорится, что в локальном кольце R_1, $R[t] \subset R_1 \subset R[[t]]$ **выполнена подготовительная теорема Вейерштрасса**, если каждый регулярный элемент R_1 выражается как произведение полинома $P \in R[t]$ и обратимого элемента $u \in R_1$.

Задача 12.1. (теорема Вейерштрасса о делении). Предположим, что в R_1 выполнена подготовительная теорема Вейерштрасса, $R[t] \subset R_1 \subset R[[t]$. Пусть $(R, \mathfrak{m})$ – полное локальное кольцо, а $r \in R_1$ – регулярный элемент степени m. Докажите, что каждое $f \in R_1$ можно представить в виде $f = qr + p$, где $q \in R_1$, а $p \in R[t]$ полином степени $< m$.

Задача 12.2. Пусть $(R, \mathfrak{m})$ – локальное кольцо, а в R_1 верна теорема Вейерштрасса о делении, $R[t] \subset R_1 \subset R[[t]$. Докажите, что в R_1 верна подготовительная теорема Вейерштрасса.

Указание. Запишите $t^m = qr + p$, где $p \in R[t]$, и докажите, что q обратимо.

Задача 12.3. Пусть $r \in R[[t]]$ – регулярный элемент степени n, $r = \sum a_i t^i$. Докажите, что $r = ur_1$, где u обратим, а $r_1 = t^n \mod \mathfrak{m}$.

Указание. Пусть $r = \sum_{i=0}^\infty t^i a_i$, а $R := \sum_{i=k}^\infty t^{i-k} a_i$. Докажите, что R обратимо, а $rR^{-1} = t^n \mod \mathfrak{m}$.

Задача 12.4. Пусть $(R, \mathfrak{m})$ – полное локальное кольцо, а $r \in R[[t]]$ регулярный элемент, удовлетворяющий $r = t^k \mod \mathfrak{m}$. Докажите, что $r = pu$, где $p \in R[t]$ полином степени k, а $u \in R[[t]]$ обратим.

Указание. Записав $r = \sum t^i a_i$, $u^{-1} = \sum t^i u_i$, получим $ru^{-1} = \sum_{l=0}^\infty \sum_{i=0}^l u_i a_{l-i} t^l$. Решите систему линейных уравнений $\sum_{i=0}^l u_i a_{l-i} = 0$, $l = k+1, k+2, ...$, воспользовавшись тем, что определитель соответствующей матрицы невырожден по модулю $\mathfrak{m}$.

Задача 12.5. Пусть R – полное локальное кольцо. Докажите, что в $R_1 = R[[t]]$ верна подготовительная теорема Вейерштрасса.

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 12.6. Докажите, что кольцо $\mathbb{C}[[t_1, ..., t_n]]$ нетерово.

Задача 12.7. Докажите, что кольцо $\mathbb{C}[[t_1, ..., t_n]]$ факториально.