Комплексная алгебраическая геометрия, листок 10: плюрисубгармонические функции

Правила: Если сдано больше 1/3 задач, студент получает $4t$ баллов, если больше 2/3 задач, $10t$ баллов, если все, кроме одной – $15t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

Определение 10.1. Плюрисубгармоническая функция это вещественнозначная функция на комплексном многообразии, такая, что $dd^c f$ есть неотрицательно определенная эрмитова форма.

Задача 10.1. Пусть f – плюрисубгармоническая функция. Докажите, что f^2 тоже плюрисубгармонична, или найдите контрпример.

Задача 10.2. Пусть f, g – голоморфные функции, не имеющие общих нулей. Докажите, что $\log(|f|^2 + |g|^2)$ плюрисубгармонична.

Задача 10.3. Пусть f – строго плюрисубгармоническая функция на комплексном многообразии. Докажите, что f не может иметь строгих максимумов.

Задача 10.4. Пусть L – положительное линейное расслоение на компактном кэлеровом многообразии M, а f – голоморфное сечение L, зануляющееся в Z. Докажите, что $|f|^{-1}$ плюрисубгармонична на $M \backslash Z$.

Задача 10.5. Пусть f – плюрисубгармоническая функция на комплексном многообразии. Докажите, что у f нет локальных максимумов.

Задача 10.6. Пусть L – нетривиальное голоморфное линейное эрмитово расслоение на компактном комплексном многообразии а $-\sqrt{-1}\Theta$ – кривизна связности Черна. Предположим, что $\Theta \leqslant 0$, то есть все собственные значения Θ неположительны. Докажите, что у L нет голоморфных сечений.

Задача 10.7. Пусть B – голоморфное эрмитово расслоение на компактном комплексном многообразии, ∇ – связность Черна, а b – голоморфное сечение B. Предположим, что кривизна ∇ равна нулю. Докажите, что $\nabla b = 0$.