Комплексная алгебраическая геометрия, листок 8: когомологии Дольбо

Правила: Если сдано больше 1/3 задач, студент получает $4t$ баллов, если больше 2/3 задач, $10t$ баллов, если все, кроме одной – $15t$ баллов.

Эти виды оценок не складываются, то есть больше $10t$ за листочек получить нельзя.

Коэффициент t равен 1.5, если задачи сданы не позже, чем через 20 дней после выдачи, 1, если между 20 и 35 днями, и 0.7, если позже.

Результаты сдачи записываются на листке ведомости, которая выдается студенту, и ее надо хранить до получения окончательных оценок по курсу.

Задача 8.1. а. Докажите, что на римановом многообразии лапласиан $C^\infty M \xrightarrow{\Delta} C^\infty M$ задает сюрьективное отображение пучков.

б. Вычислите группу i-х когомологий, $i > 0$, пучка гармонических функций.

в. Докажите, что на римановом многообразии лапласиан $\Lambda^i M \xrightarrow{\Delta} \Lambda^i M$ задает сюрьективное отображение пучков.

Задача 8.2. Пусть $\mathcal{W}$ – пучок замкнутых (1,1)-форм на комплексном многообразии. Постройте точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_M \oplus \overline{\mathcal{O}_M} \longrightarrow C^\infty M \oplus C^\infty M \longrightarrow \mathcal{W} \longrightarrow 0.$$

Докажите, что когомологии $\mathcal{W}$ конечномерны, если M компактно и кэлерово.

Задача 8.3. Векторное поле v на симплектическом многообразии (M,ω) называется **гамильтоновым**, если $\operatorname{Lie}_v \omega = 0$. Докажите, что для $i \geqslant 1$, имеет место изоморфизм $H^i(\operatorname{Ham}) \cong H^{i+1}(M)$ где $\operatorname{Ham} M$ обозначает пучок гамильтоновых векторных полей.

Задача 8.4. Докажите, что на одномерном комплексном многообразии вторые когомологии пучка мероморфных функций (по сложению) равны нулю.

Задача 8.5. Пучок $\mathcal{F}$ на M называется **вялым**, если отображение ограничения

$$\Gamma_M(\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma_U(\mathcal{F})$$

сюрьективно для каждого открытого U. Докажите, что любой пучок вкладывается в вялый пучок.