Комплексная алгебраическая геометрия, экзамен

Каждому студенту выдается список задач для решения (7 штук), по одной задаче из каждого раздела. Списки задач составлены индивидуально с помощью рандомайзера. Задачи сдаются устно. Число очков за это задание вычисляется по формуле $b = 10s$, где s – число баллов за задачи.

3.1. Кэлеровы структуры

Задача 3.1. Постройте G-инвариантную кэлерову структуру на G/H, докажите интегрируемость комплексной структуры и замкнутость эрмитовой 2-формы. Проверьте единственность этой кэлеровой структуры (докажите единственность либо найдите контрпример).

а. (2 балла) $G = SO(2, n)$, $H = SO(2) \times SO(n)$.

б. (2 балла) $G = SO(2 + n)$, $H = SO(2) \times SO(n)$.

в. (2 балла) $G = SO(2n)$, $H = U(n)$.

г. (2 балла) $G = U(p, q)$, $H = U(p) \times U(q)$.

д. (2 балла) $G = U(p + q)$, $H = U(p) \times U(q)$.

Задача 3.2. Постройте G-инвариантную комплексную структуру на G/H, или докажите, что ее не существует.

а. (2 балла) $G = SL(6)$, $H = SO(6)$.

б. $G = GL(8)$, $H = SO(8)$.

3.2. Теория Ходжа

Задача 3.3. Пусть (M, ω, I) – комплексное эрмитово многообразие, $L(\eta) := \eta\wedge\omega$, $\Lambda := L^*$ операторы Ходжа, а d, $d^c := IdI^{-1}$ обычные дифференциалы. Рассмотрим оператор $\Delta_\omega := d\delta + \delta d$, где $\delta := [d^c, \Lambda]$.

а. Докажите, что Δ_ω коммутирует с d и d^c.

б. Докажите, что $\Delta_\omega : \Lambda^*(M) \longrightarrow \Lambda^*(M)$ не может быть сюрьективно, если M компактно.

Задача 3.4. Биинвариантные формы на группе Ли суть формы, инвариантные относительно левых и правых сдвигов. Пусть G – компактная группа Ли, снабженная биинвариантной метрикой. Докажите, что все биинвариантные дифференциальные формы гармоничны.

Задача 3.5. Пусть M – замкнутый шар с римановой метрикой, которая гладко продолжается на границу, а α – дифференциальная форма, тоже гладко продолжающаяся на границу. Докажите, что $\alpha \in \operatorname{im}\Delta$, где Δ – оператор Лапласа, связанный с g.

Задача 3.6 (2 балла). Пусть M – риманово многообразие, гомотопически эквивалентное конечному клеточному пространству. Докажите, что i-е когомологии пучка гармонических форм конечномерны для $i > 1$.

Задача 3.7. Пусть M – компактное кэлерово многообразие, d, $d^c := IdI^{-1}$ обычные дифференциалы, а $\alpha \in \ker dd^c$. Докажите, что для любой замкнутой (p,q)-формы β, верно $\int_M \alpha \wedge d\alpha \wedge \beta = 0$.

3.3. Топология кэлеровых многообразий

Задача 3.8. Пусть M есть $\mathbb{C}P^4 \times \mathbb{C}P^4 \times \mathbb{C}P^4$ Докажите, что M не допускает кэлеровой структуры с ориентацией, которая противоположна обычной.

Задача 3.9. Пусть M компактное кэлерово многообразие, $\dim_{\mathbb{C}} M = 4$, а $\bar{M}$ – то же многообразие с противоположной ориентацией. Докажите, что $\bar{M}$ не допускает кэлеровой структуры или постройте контрпример.

Задача 3.10. Пусть M компактное комплексное многообразие, а $\pi_1(M) \cong G$, где G есть группа целочисленных матриц 4×4, у которых на диагонали 1, а под диагональю 0. Докажите, что M не кэлерово.

Задача 3.11. Пусть (M, ω) компактная кэлерова поверхность, $\alpha \in H^{1,1}(M)$ замкнутая форма, а $\int_M \alpha^2 > 0$. Докажите, что $\int_M \alpha \wedge \omega \neq 0$.

Задача 3.12 (2 балла). Пусть $M = \mathbb{C}P^2 \sharp \mathbb{C}P^2$ (связная сумма). Докажите, что M не допускает кэлеровой структуры.

Задача 3.13. Для любого заданного $n > 0$, найдите многообразие размерности n, с $b_2 \neq 0$, не допускающее симплектической структуры.

3.4. Проективные многообразия

Задача 3.14. Пусть M – компактное, непроективное кэлерово многообразие, $H^{2,0}(M)$ одномерно, а $\phi: \ M \longrightarrow M$ – голоморфная инволюция, не имеющая неподвижных точек. Докажите, что ϕ действует тривиально на $H^{2,0}(M)$.

Задача 3.15. Пусть M – компактное кэлерово многообразие, $H^{1,1}(M)$ одномерно, а $\phi: \ M \longrightarrow M$ – голоморфный автоморфизм. Докажите, что ϕ действует тривиально на $H^{1,1}(M)$.

Задача 3.16 (2 балла). Пусть $M \subset \mathbb{C}P^n$ многообразие Калаби-Яу, а $\phi: \mathbb{C}P^n \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ автоморфизм, сохраняющий M. Докажите, что существует метрика Фубини-Штуди на $\mathbb{C}P^n$ такая, что ϕ является изометрией.

Задача 3.17. Пусть M – проективное многообразие, а $\phi: \ M \longrightarrow M$ – автоморфизм. Докажите, что существует ϕ-инвариантная кэлерова метрика, или найдите контрпример.

Задача 3.18. Пусть M – компактная комплексная поверхность, $\pi : M \longrightarrow S$ – голоморфное отображение на кривую, а C – гладкий слой π. Докажите, что $\deg K_M\big|_C = 2g-2$, где $K_M = \Lambda^{2,0}(M)$ есть каноническое расслоение M, а g – род кривой C.

Задача 3.19 (2 балла). Пусть L – обильное линейное расслоение на проективном многообразии, а h – эрмитова метрика с положительной кривизной. Рассмотрим функцию $l : \operatorname{Tot} L \longrightarrow \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ на тотальном пространстве L, переводящую вектор в его длину. Докажите, что $dd^c l$ - кэлерова метрика на пространстве $\operatorname{Tot} L \backslash 0$ ненулевых векторов.

3.5. Голоморфные расслоения, дифференциальные формы и потоки

Задача 3.20. Найдите пример собственного морфизма гладких многообразий $f : X \longrightarrow Y$, и гладкой формы α на X, такой, что поток $f_*\alpha$ не представляется гладкой формой.

Задача 3.21. Пусть M гладкое многообразие с транзитивным действием группы Ли G. Докажите, что каждый G-инвариантный поток на M – дифференциальная форма.

Задача 3.22 (2 балла). Пусть $f : X \longrightarrow Y$ собственный, сюрьективный морфизм гладких комплексных многообразий размерности 2, а α – дифференциальная форма на X. Докажите, что поток $f_*\alpha$ вне какого-то конечного множества равен дифференциальной форме.

Задача 3.23. Пусть f_1, f_2 – голоморфные функции на кэлеровом многообразии. Докажите, что функция $\Delta(\log(|f_1|^2 + |f_2|^2))$ неотрицательна.

Задача 3.24. Пусть f, g – плюрисубгармонические функции, а $M : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ гладкая функция, которая выпукла вниз. Пусть она также монотонна по обоим аргументам. Докажите, что $M(f,g)$ плюрисубгармонична.

Задача 3.25. Пусть B – нетривиальное голоморфное линейное расслоение на комплексном многообразии, а h – метрика на B с неположительной кривизной связности Черна. Докажите, что B не имеет ненулевых голоморфных сечений.

3.6. Уравнение Монжа-Ампера

Задача 3.26. Пусть ϕ есть решение уравнения Монжа-Ампера $(\omega + dd^c\phi)^2 = e^f\omega^2$ на компактной кэлеровой поверхности. Докажите, что $\int_M |d\phi|^2\omega^2 \leqslant C(f,\omega)\int |\phi|\omega^2$, где $C(f,\omega)$ есть константа, которая непрерывно зависит от f и ω и не зависит от ϕ.

Задача 3.27. Пусть (M,ω) – n-мерное кэлерово многообразие, а ϕ – решение уравнения $(\omega + dd^c\phi)^{n-k} \wedge \omega^k = \omega^n$, причем форма $\omega + dd^c\phi$ кэлерова. Докажите, что $\phi = \mathsf{const}$.

Задача 3.28. Пусть M – компактное, комплексное n-многообразие, ω – замкнутая невырожденная $(1,1)$-форма, а $\phi \in C^\infty M$ – решение уравнения $(\omega + dd^c\phi)^n = e^f\omega^n$. Докажите, что $\omega + dd^c\phi$ имеет ту же сигнатуру, что и ω.

Задача 3.29 (2 балла). Пусть ϕ_1, ϕ_2 – плюрисубгармонические функции на шаре $B \subset \mathbb{C}^n$, гладко продолжающиеся на границу ∂B, причем $(dd^c\phi_1)^n = (dd^c\phi_2)^n$ и $\phi_1\big|_{\partial B} = \phi_2\big|_{\partial B}$. Докажите, что $\phi_1 = \phi_2$.

Задача 3.30. Пусть (M, ω) – компактное кэлерово многообразие, $\dim_{\mathbb{C}} M = 4$, а $\Omega \in \Lambda^{2,0}(M)$ – голоморфная симплектическая форма. Предположим, что для кэлеровой формы ω_1, когомологичной ω, имеет место $\omega_1^2 \wedge \Omega \wedge \bar{\Omega} = \omega^2 \wedge \Omega \wedge \bar{\Omega}$. Докажите, что $\omega = \omega_1$.

Задача 3.31 (2 балла). Пусть M – компактное кэлерово многообразие с тривиальным каноническим расслоением (многообразие Калаби-Яу), снабженное риччи-плоской метрикой ω_0, а ω_t гладкое семейство кэлеровых метрик $t \in [-\varepsilon, +\varepsilon]$ таких, что $\dot{\omega}_t$ гармонично по отношению к метрике ω_t. Докажите, что ω_t риччи-плоская. Можно пользоваться теоремой Калаби-Яу.

3.7. Ростки подмногообразий

Задача 3.32. Пусть M – связное комплексное многообразие, допускающее непостоянную голоморфную функцию, а R – кольцо голоморфных функций на M. Докажите, что R не нетерово.

Задача 3.33. Пусть f – голоморфная функция на гладком комплексном многообразии M, а $V(f)$ – ее множество нулей. Докажите, что для каждой точки $z \in V(f)$, есть окрестность $U \ni z$ такая, что пересечение $V(f) \cap U$ связно.

Задача 3.34. Пусть $M \subset \mathbb{C}^n$ – росток неприводимого комплексного многообразия в 0, размерности $\geqslant 2$, а f – голоморфная функция на $M \backslash 0$. Докажите, что f продолжается до мероморфной функции на M.

Задача 3.35. Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – подмногообразие, заданного как множество нулей неприводимого однородного полинома. Докажите, что его росток в нуле неприводим.

Задача 3.36. Пусть G – связная компактная группа Ли, действующая на $\mathbb{C}^n$ и сохраняющая росток подмногообразия Z в нуле. Докажите, что идеал Z в кольце ростков голоморфных функций порождается G-инвариантными функциями, или найдите контрпример.

Задача 3.37. Пусть X_1, X_2 – ростки комплексных многообразий. Рассмотрим фактор $X_1 \sim_Z X_2$ полученный отождествлением отмеченных точек. Докажите, что это росток комплексного многообразия.