Комплексная алгебраическая геометрия,

лекция 15: теорема Чжоу

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

6 июня 2014

13-го июня экзамен (12:00)!
(праздник)

Комплексно-аналитические множества и их ростки (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексно-аналитическое подмножество** комплексного многообразия M есть замкнутое подмножество $Z \subset M$, которое локально биголоморфно подмножеству в $U \subset \mathbb{C}^n$, заданному как множество общих нулей какого-то идеала $I \subset \mathcal{O}_U$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $Z_1, Z_2 \subset M$ комплесно-аналитические подмногообразия. Они называются **эквивалентными в x**, если $Z_1 \cap U = Z_2 \cap U$ для какой-то окрестности $U \ni x$. **Росток комплексно-аналитического подмножества** в $x \in M$ есть класс эквивалентности комплексно-аналитических подмножеств $Z \subset U \ni x$ по отношению к "эквивалентности в x."

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Росток комплексно-аналитического подмножества Z в $x \in M$ называется **неприводимым**, если не существует нетривиального разложения $Z = A_1 \cup A_2$ на два комплексно-аналитических подмножества.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Росток комплексно-аналитического подмножества Z **неприводим тогда и только тогда, когда идеал I_Z ростков функций, зануляющихся в Z, простой.**

СЛЕДСТВИЕ: **Каждый росток комплексно-аналитического множества разлагается в конечное объединение неприводимых.**

Регулярная система координат для идеала (повторение)

ТЕОРЕМА: Пусть J – простой идеал в $\mathcal{O}_n$ **Тогда найдется система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ в окрестности 0, такая, что**

1. $J_d = 0$, где J_d – множество функций $f \in J$, которые зависят только от первых d координат.
2. Для каждого $k > d$, найдется полином Вейерштрасса $P_k \in J_k$ вида $P_k(z_1, ..., z_{k-1}, z_k) = z_k^{s_k} + \sum_{i=0}^{s_k-1} \alpha_i z_k^i$, где α_i – аналитические функции, которые зависят только от первых $k-1$ координат.
3. **Идеал J порожден P_i.**

Более того, система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ может быть выбрана таким образом, что **векторы $\frac{d}{dz_i}|_0$ будут сколь угодно близки к любому заданному базису в $T_0\mathbb{C}^n$.**

ТЕОРЕМА: (Теорема о конечности)
Пусть $z_1, ..., z_n$ – регулярная система координат для идеала $J \subset \mathcal{O}_n$, а $\mathcal{O}_d$ – голоморфные функции, зависящие только от $z_1, ..., z_d$. Тогда **кольцо $\mathcal{O}_n/J$ конечно порождено как $\mathcal{O}_d$-модуль.**

СЛЕДСТВИЕ: Каждый росток комплексно-аналитического множества **допускает конечное, сюрьективное отображение на k-мерный диск.**

Комплексные многообразия (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество. Назовем точку $z \in Z$ **гладкой**, если в окрестности z, Z – гладкое подмногообразие, и **особой** в противном случае.

ТЕОРЕМА: Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество, а $Z_{\text{sing}} \subset Z$ – множество особых точек Z. **Тогда Z_{sing} – комплексно-аналитическое подмножество,** а его дополнение плотно в Z.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексное многообразие** (“variety”) есть окольцованное пространство, локально изоморфное комплексно-аналитическому подмножеству с пучком голоморфных функций на нем.

ПРИМЕР: Если X – комплексное многообразие, то X_{sing} **– комплексное подмногообразие в нем.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Комплексное многообразие называется **неприводимым**, если его нельзя разложить в нетривиальное конечное объединение замкнутых комплексных подмногообразий.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что комплексное многообразие **неприводимо тогда и только тогда, когда множество его гладких точек связно.**

“Принцип максимума”

ТЕОРЕМА: (“Принцип максимума для голоморфных функций”) Пусть f – голоморфная функция на компактном, неприводимом комплексном многообразии Z, причем $|f|$ достигает максимума в какой-то точке Z. **Тогда f постоянна.**

Немедленно вытекает из следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть f – непостоянная голоморфная функция на неприводимом комплексном многообразии Z. **Тогда f открыто,** то есть переводит открытые множества в открытые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $x \in Z$. Воспользовавшись регулярными координатами, найдем неприводимый росток гладкой кривой $C \longrightarrow Z_x$, на которой f непостоянно. **Тогда $f|_C$ содержит окрестность $f(x)$.** ■

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – компактное комплексное подмногообразие. **Тогда Z – конечное множество.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Голоморфные функции разделяют точки Z. ■

Конечные отображения и размерность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Собственное отображение** топологических пространств есть непрерывное отображение, такое, что прообраз любого компакта компактен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Конечное отображение** комплексных многообразий есть голоморфное отображение, которое собственно, причем прообраз любой точки – конечное множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Размерность** неприводимого комплексного многообразия есть размерность множества его гладких точек. Размерность приводимого многообразия есть максимум размерностей всех его компонент.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $\dim X > \dim X_{\mathrm{sing}}$.

Теорема о постоянном ранге

ТЕОРЕМА: ("теорема о постоянном ранге") Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное отображение, причем X гладко, а ранг $\operatorname{rk} F := \operatorname{rk} dF$ постоянный. Тогда **у каждой точки $x \in X$ есть окрестность $U \ni x$, такая, что $F(U)$ - гладкое многообразие размерности $\operatorname{rk} F$, а слои $F^{-1}(z) \cap U$ – гладкие подмногообразия размерности $\ker dF$.**

Доказательство. Шаг 1: Если $\operatorname{rk} F = 0$ в $x \in X$, то F задает гладкое вложение окрестности x в Y, по теореме о неявной функции.

Шаг 2: Если же $\operatorname{rk} F = k$, заменим Y на $Y \times \mathbb{C}^k$, а F на $F \times f$, где $f: X \longrightarrow \mathbb{C}^k$ выбрано таким образом, что ранг $F \times f$ равен нулю. Затем применим к $F \times f$ утверждение шага 1. ■

Свойства конечных отображений

ЛЕММА: Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное отображение комплексных многообразий, которое **конечно**, то есть собственно и имеет конечные слои. **Тогда** $\dim X \leqslant \dim Y$**.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Воспользовавшись теоремой о конечности, найдем конечное отображение из Y в диск D той же размерности. Заменив Y на D, можно считать, что Y это диск. Пусть $x \in X$ – гладкая точка, в которой dF имеет максимальный ранг. Тогда **слой F в x имеет ту же размерность, что и $\ker dF|_x$, по теореме об обратной функции.** Следовательно, $\ker dF = 0$. ■

Свойства конечных отображений (продолжение)

(*) **УТВЕРЖДЕНИЕ:** Пусть $F: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ – гладкое, голоморфное отображение, сохраняющее 0, а $Z \subset \mathbb{C}^n$ – росток комплексно-аналитического подмножества в нуле, такой, что $F^{-1}(0) \cap Z = 0$. **Тогда $F: Z \cap U \longrightarrow U'$ конечно для каких-то окрестностей нуля в $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^m$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Произведя локальную замену координат, можно считать, что F есть линейная проекция. Возьмем окрестность 0 в $\mathbb{C}^n$ в виде полидиска $D \times D'$, где F проектирует $D \times D'$ на D' вдоль D. Выбрав D' достаточно маленьким, можно считать, что $Z \cap \partial D \times D' = \emptyset$. Действительно, $Z \cap \partial D \times D'$ замкнуто, а его пересечение с $F^{-1}(0)$ пусто. Поскольку слой $F^{-1}(t) \cap Z$ – замкнутое подмножество, не пересекающее границы диска, оно компактно в $D \times \{t\}$. Из этого следует, что $F\Big|_{Z \cap D \times D'}: Z \cap D \times D \longrightarrow D'$ – собственное отображение. **Конечность слоев $F\Big|_{Z \cap D \times D'}$ следует из принципа максимума** (компактное подмногообразие диска конечно). ■

Ранг голоморфного отображения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – голоморфное отображение комплексных многообразий. Определим **ранг F в x** как $\operatorname{rk}_x F := \dim(X,x) - \dim(F^{-1}(F(x)),x)$.

ТЕОРЕМА: Ранг $\operatorname{rk}_x F$ полунепрерывен сверху как функция x.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $F: (X,x) \longrightarrow (Y,y)$ – росток голоморфного отображения, причем $F^{-1}(y)$ имеет размерность k. Будем считать, что (X,x) вложено в $(\mathbb{C}^n, 0)$. Рассмотрим общую гиперплоскость $V \subset \mathbb{C}^n$ размерности $n-k$, которая проходит через x и пересекается с $F^{-1}(y)$ по конечному множеству. **Тогда $F|_V \cap X$ – конечное отображение в некоторой окрестности x, в силу утверждения (*), поэтому $F^{-1}(F(x'))$ пересекается с V по конечному множеству для любого x' в окрестности x.** Следовательно. $\dim F^{-1}(F(x')) \leqslant \dim(F^{-1}(F(x)),x)$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы доказали, что **множество точек x, где $\operatorname{rk} F$ максимален, открыто.**

Теорема о ранге отображения

ТЕОРЕМА: ("теорема о ранге") Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – сюрьективное голоморфное отображение комплексных многообразий. **Тогда**

$$\dim Y = \sup_{x \in X} \operatorname{rk}(F, x).$$

Доказательство. Шаг 1: Пусть $X_1 \subset X$ – множество гладких точек X, где ранг максимален. Тогда $\dim F(X_1) = \sup_{x \in X} \operatorname{rk}(F, x)$ по теореме о постоянном ранге. Значит, $F(X_1)$ **имеет размерность** $\sup_{x \in X} \operatorname{rk}(F, x)$**.**

Шаг 2: Пусть X_1' – множество гладких точек в дополнении к X_1; это открытое, гладкое, плотное подмногообразие в X. Обозначим за X_2 множество точек X_1', где $\operatorname{rk}(F\big|_{X_1'})$ максимален. Повторив эту процедуру, получим **набор непересекающихся, открытых, гладких подмногообразий** $\overline{X_1 \coprod X_2 \coprod X_3 \coprod ...} = X$**, причем** $\operatorname{rk} F\big|_{X_i}$ **постоянный на каждом** X_i **и убывает как функция** i**.**

Шаг 3: Снова применив теорему о постоянном ранге, получим, что $\dim F(X_i) < \dim F(X_1)$, значит, $F(X)$ **есть замыкание объединения комплексных подмногообразий ранга** $\leqslant \sup_{x \in X} \operatorname{rk}(F, x)$**.** ■

Теорема Реммерта и Реммерта-Штейна (схема доказательства)

ТЕОРЕМА: ("Теорема Реммерта-Штейна") Пусть X – комплексное многообразие, $A \subset X$ – комплексно-аналитическое подмножество, а Z – неприводимое комплексно-аналитическое подмножество в $X \backslash A$. Предположим, что $\dim Z > \dim A$. **Тогда замыкание $\overline{Z}$ комплексно-аналитично в X.**

ТЕОРЕМА: ("Теорема Реммерта о собственном отображении") Пусть $F: X \longrightarrow Y$ – собственный морфизм комплексных многообразий. **Тогда $F(X)$ комплексно-аналитично в Y.**

Доказательство этих теорем ведется индуктивно.
(РШ$_m$): утверждение теоремы Реммерта-Штейна верно для $\dim X \leqslant m$.
(Р$_m$): утверждение теоремы Реммерта верно для $\dim X \leqslant m$.

Мы доказываем два утверждения:

А. (РШ$_m$) и (Р$_{m-1}$) влечет (Р$_m$).
Б. (Р$_{m-1}$) влечет (РШ$_m$).

Теорема Реммерта и Реммерта-Штейна: утверждение A.

Доказательство импликации A: (РШ$_m$) и (Р$_{m-1}$) $\Rightarrow$ (Р$_m$):

Шаг 1: Пусть X_1 – множество всех точек X, где $rk(F)$ не максимальный, а $X' := X \backslash (X_{\text{sing}} \cup X_1)$. По теореме о постоянном ранге, $F(X')$ **аналитическое в окрестности каждой точки, которая не принадлежит** $F(X_1) \cup F(X_{\text{sing}})$.

Шаг 2: Воспользовавшись (Р$_{m-1}$), можно считать, что $F(X_1)$ **и** $F(X_{\text{sing}})$ **комплексно-аналитические.**

Шаг 3: По теореме о ранге,

$$\dim F(X_{\text{sing}}) = \sup_{x \in X_{\text{sing}}} \operatorname{rk}(F\big|_{X_{\text{sing}}}, x) =$$
$$\dim X_{\text{sing}} - \inf_{x \in X_{\text{sing}}} \dim F^{-1}(F(x)) < \operatorname{rk} \sup_{x \in X} \operatorname{rk}(F, x) = \dim F(X').$$

Аналогично, $\dim F(X_1) = \sup_{x \in X_1} \operatorname{rk}(F\big|_{X_1}, x) < \sup_{x \in X} \operatorname{rk}(F, x) = \dim F(X')$.

Шаг 4: Теперь утверждение A **получается применением РШ$_m$ к** $Z = F(X')$ **и** $A = F(X_1) \cup F(X_{\text{sing}})$.

Теорема Реммерта и Реммерта-Штейна: утверждение Б.

Доказательство импликации Б: $(\mathbf{P}_{m-1}) \Rightarrow (\mathbf{РШ}_m)$:
Шаг 1: Воспользовавшись индукцией по $\dim A$, **можно считать, что A гладко, а Z неприводимо.**

Шаг 2: Применив подходящий голоморфный диффеоморфизм, можно считать, что Z вложено в диск $B \subset \mathbb{C}^n$, а $A \subset B$ – линейное подпространство там же. Рассмотрим линейную форму, которая не равна тождественно нулю на Z. Она высекает на Z подмногообразие положительной коразмерности. Воспользовавшись индукцией, мы **построим линейную проекцию $F: B \longrightarrow \mathbb{C}^{\dim Z}$ такую, что $F^{-1}(0) \cap (Z \cup A)$ имеет размерность ноль.**

Шаг 3: Применив тот же аргумент, что доказывает утверждение (*), найдем полидиск $D \times D' \subset B$ такой, что проекция F отображает $D \times D'$ в D', причем $F\Big|_{(Z\cup A)\cap D\times D'}: (Z \cup A) \cap D \times D \longrightarrow D'$ **конечно** (собственно и с конечными слоями). Заменим Z на $Z \cap D \times D'$ и A на $A \cap D \times D'$.

Шаг 4: Пусть A' – объединение A и множества всех точек, где $F|_Z$ не диффеоморфизм, а $Z' := Z \backslash F^{-1}(F(A'))$. Тогда $F|_{Z'}$ – конечное и неразветвленное накрытие, следовательно, оно q-листно. Множество $A' \cap Z$ аналитично потому что это дискриминант голоморфного отображения. **В силу $(\mathbf{P}_{m-1})$, образ $F(A' \cap Z)$ – комплексно-аналитический.**

Теорема Ремметра и Ремметра-Штейна: утверждение Б (продолжение).

Шаг 5: Пусть $F_1: D \times D' \longrightarrow D_1 \times D'$ – линейная проекция, тождественная на D', причем диск D_1 одномерен. Легко видеть, что

$$\overline{Z} = \{x \in D \times D' \mid \forall F_1 \in \mathcal{I}, \quad F_1(x) \in F_1(\overline{Z})\},$$

где $\mathcal{I}$ есть множество всех таких F_1. Поэтому для доказательства (РШ$_m$), достаточно убедиться, что $F_1(\overline{Z})$ комплексно-аналитическое. Значит, **можно считать, что диск D одномерен.**

Шаг 6: В этой ситуации, Z' есть график q-листного отображения

$$D' \backslash F(A') \longrightarrow \mathrm{Sym}^q(\mathbb{C}), \quad \zeta_1, ..., \zeta_q : D' \backslash F(A') \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Коэффициенты элементарных симметрических полиномов от $\zeta_1, ..., \zeta_q$ – голоморфные функции на $D' \backslash F(A')$, которые ограничены на D', значит, **продолжаются до голоморфных функций $e_0, ..., e_{q-1}$ на D'.**

Шаг 7: Мы получили, что замыкание Z **задается уравнением $t^q + e_1 t^{q-1} + ... + e_q = 0$ в $\mathbb{C} \times D'$,** значит, Z' комплексно-аналитично. ■

Теорема Чжоу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Подмножество $\mathbb{C}P^n$ называется **проективным подмногообразием**, если это множество общих нулей однородного идеала в кольце однородных полиномов на $\mathbb{C}^{n+1}$.

ТЕОРЕМА: Пусть $Z \subset \mathbb{C}P^n$ – замкнутое комплексно-аналитическое подмножество. **Тогда Z проективно.**

Доказательство. Шаг 1: Рассмотрим естественную проекцию $\mathbb{C}^{n+1} \backslash 0 \longrightarrow \mathbb{C}P^n$, и пусть $C_0(Z)$ – прообраз Z. **Применив Реммерта-Штейна, получим, что его замыкание $C(Z)$ – комплексное подмногообразие.**

Шаг 2: Пусть I_Z – идеал $C(Z)$ в кольце ростков. Рассмотрим действие $\mathbb{C}^*$ на $\mathbb{C}^{n+1}$ растяжениями. Поскольку Z $\mathbb{C}^*$-инвариантно, **идеал I_Z $\mathbb{C}^*$-инвариантен.**

Шаг 3: Пусть $f \in I_Z$, а $f = \sum P_i$ ее разложение в ряд Тэйлора, где P_i – однородные полиномы степени i на $\mathbb{C}^{n+1}$. Тогда $\mathbb{C}^*$ действует на f по формуле $\rho_\lambda(f) = \sum \lambda^i P_i$. Поскольку I_Z $\mathbb{C}^*$-инвариантно, **функции $\frac{d^s}{d\lambda^s}\rho_\lambda(f) = \sum_{r=s}^\infty \binom{r}{s}\lambda^{r-s}P_r$ лежат в I_Z.**

Шаг 4: Положив $\lambda = 0$, получим, что **$P_r \in I_Z$ для любого $r \geqslant 0$.** ■

13-го июня экзамен (12:00)!
(праздник)