Комплексная алгебраическая геометрия,

лекция 14: комплексно-аналитические множества

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

30 мая 2014

13-го июня экзамен (12:00)!
(праздник)

Кольцо ростков комплексно-аналитических функций (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть – комплексное многообразие, $x \in M$. **Кольцо ростков** комплексно-аналитических функций в x есть объединение колец $\Gamma(\mathcal{O}_U)$ для всех связных открытых подмножеств M, содержащих x. Кольцо ростков аналитических функций на $(\mathbb{C}^n, 0)$ обозначается $\mathcal{O}_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кольцо называется **локальным**, если в нем есть идеал I (называемый **максимальным идеалом кольца**) такой, что каждый элемент $a \notin I$ обратим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кольцо R называется **нетеровым**, если каждый идеал в R конечно порожден.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кольцо R называется **факториальным**, если в нем имеет место однозначность разложения на простые сомножители, то есть мультипликативная группа есть произведение свободной абелевой полугруппы и группы обратимых элементов.

ТЕОРЕМА: Кольцо ростков аналитических функций – **локальное, нетерово, факториальное кольцо.**

Комплексно-аналитические множества и их ростки (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексно-аналитическое подмножество** комплексного многообразия M есть замкнутое подмножество $Z \subset M$, которое локально биголоморфно подмножеству в $U \subset \mathbb{C}^n$, заданному как множество общих нулей какого-то идеала $I \subset \mathcal{O}_U$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $Z_1, Z_2 \subset M$ комплесно-аналитические подмногообразия. Они называются **эквивалентными в x**, если $Z_1 \cap U = Z_2 \cap U$ для какой-то окрестности $U \ni x$. **Росток комплексно-аналитического подмножества** в $x \in M$ есть класс эквивалентности комплексно-аналитических подмножеств $Z \subset U \ni x$ по отношению к "эквивалентности в x."

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Росток комплексно-аналитического подмножества Z в $x \in M$ называется **неприводимым**, если не существует нетривиального разложения $Z = A_1 \cup A_2$ на два комплексно-аналитических подмножества.

Примарное разложение ростков комплексно-аналитических множеств (повторение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Росток комплексно-аналитического подмножества Z **неприводим тогда и только тогда, когда идеал I_Z ростков функций, зануляющихся в Z, простой.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если есть нетривиальное разложение $Z = A_1 \cup A_2$, то найдутся функции f_1, f_2, зануляющиеся на одном из A_i, но не на другом; **в этом случае $f_1 f_2 \in I_Z$, значит, I_Z не простой.**

Наоборот, если идеал I_Z не простой, найдутся $f_1, f_2 \notin I_Z$, такие, что $f_1 f_2 \in I_Z$; тогда **соответствующие множества нулей удовлетворяют $V_{f_1} \cup V_{f_2} \supset I_Z$, значит, $(V_{f_1} \cap I_Z) \cup (V_{f_2} \cap I_Z)$ – нетривиальное разложение.** ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $Z_1 \supsetneq Z_2 \supsetneq Z_3 \supsetneq ...$ – убывающая цепочка ростков комплексно-аналитических множеств. **Тогда она обрывается.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Следует из нетеровости кольца ростков голоморфных функций. ■

СЛЕДСТВИЕ: Каждый росток комплексно-аналитического множества разлагается в конечное объединение неприводимых. ■

Подготовительная теорема Вейерштрасса (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $z_1, ..., z_n$ – координаты на $\mathbb{C}^n$. **Полином Вейерштрасса** есть функция вида $A_0 + z_n A_1 + ... + z_n^k A_k$, где $A_i \in \mathcal{O}_{n-1}$ – аналитические функции, зависящие только от $z_1, ..., z_{n-1}$. Полином Вейерштрасса часто записывается в виде $P(z, z_n)$, где z обозначает совокупность координат $z_1, ..., z_{n-1}$.

ТЕОРЕМА: **(Подготовительная теорема Вейерштрасса)**
Пусть F – аналитическая функция в окрестности 0 в $\mathbb{C}^n$, такая, что $\frac{F(0,z_n)}{z_n^k}$ имеет ненулевой предел в 0. **Тогда для какого-то полидиска, F можно разложить как $F = u(z)P(z, z_n)$, где u обратима, а P – полином Вейерштрасса со старшим коэффициентом 1.** Более того, такое разложение единственно.

Замечание о выборе системы координат. В качестве z_n можно выбрать любой вектор, для которого функция $F(0, z_n)$ имеет нуль минимально возможного порядка, а в качестве $z_1, ..., z_{n-1}$ – любую систему координат, дополнительную к z_n.

Регулярная система координат для идеала

Для заданной координатной системы $z_1, ..., z_n$ в $\mathbb{C}^n$, обозначим за $\mathcal{O}_k$ кольцо ростков голоморфных функций в 0, зависящих только от первых d координат.

ТЕОРЕМА: Пусть J – простой идеал в $\mathcal{O}_n$. **Тогда найдется система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ в окрестности 0, такая, что**

1. $J_d = 0$, где $J_k := \mathcal{O}_k \cap J$.
2. **Идеал J порожден набором полиномов Вейерштрасса $P_i \in \mathcal{O}_{i-1}[z_k]$, $i = d + 1, ..., d_n$.**

Более того, система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ может быть выбрана таким образом, что **векторы $\frac{d}{dz_i}|_0$ будут сколь угодно близки к любому заданному базису в $T_0\mathbb{C}^n$.**

Доказательство. Шаг 1:
Пусть d – самое большое число, для которого $J_d = 0$. Если $d = n$, доказывать нечего. **Если $d < n$, можно считать, что для $J_{n-1} \subset \mathcal{O}_{n-1}$ утверждение теоремы уже доказано** (индукцией по n).

Шаг 2: Возьмем $P \in J \backslash J_{n-1}$ с минимальным порядком зануления в 0 и применим к нему подготовительную теорему Вейерштрасса. Если $J \neq \langle P, J_{n-1} \rangle$, возьмем в $P' \in J \backslash \langle P, J_{n-1} \rangle$, и применим к P, P' алгоритм Евклида, получив полином меньшей степени. ■

Регулярные координаты (продолжение)

ТЕОРЕМА: Пусть J – простой идеал в $\mathcal{O}_n$. **Тогда найдется система координат $z_1, ..., z_d, z_{d+1}, ..., z_n$ в окрестности 0, такая, что**

1. $J_d = 0$, где $J_k := \mathcal{O}_k \cap J$.
2. **Идеал J порожден набором полиномов Вейерштрасса $P_i \in \mathcal{O}_{i-1}[z_k]$, $i = d+1, ..., d_n$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: В такой ситуации, $z_1, ..., z_n$ называется **регулярной системой координат** для идеала J.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если J – идеал функций, зануляющихся на ростке аналитического подмножества Z, первое условие теоремы равносильно следующему. Рассмотрим проекцию P_d на первые d координат. **Тогда $P_d(Z)$ не содержится в собственном аналитическом подмножестве $Z' \subset \mathbb{C}^d$** (докажите это).

ЗАМЕЧАНИЕ: В этой ситуации, второе условие – алгебраическая версия следующего геометрического факта. Рассмотрим проекцию на первые d координат, $P_d: \ Z \longrightarrow \mathbb{C}^d$. **Тогда прообраз каждой точки – конечное множество, в общей точке состоящее из $N := \prod_{k=d+1}^n s^k$ точек** (если считать с кратностями), причем функция, которая переводит $z \in \mathbb{C}^d$ в соответствующую точку $\operatorname{Sym}^N \mathbb{C}^n$, комплексно-аналитична.

Теорема Артина о примитивном элементе

ТЕОРЕМА: (теорема Артина о примитивном элементе)
Пусть $[K : k]$ – конечное расширение полей, содержащих $\mathbb{C}$, а $x_1, ..., x_n \in K$ мультипликативно порождают K над k. **Тогда для общей линейной комбинации $u := \sum \lambda_i x_i$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, u порождает K** (такой u называется **примитивным**).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $K_j \subsetneq K$ – множество всех промежуточных подполей, не равных K. Нам нужно доказать, что для общих λ_j, $u(\lambda_1, ..., \lambda_n) := \sum \lambda_i x_i$ не содержится ни в одном из K_j.

Если $u(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ содержится в K_j, то x_i не порождают K. **Поэтому для каждого из подполей K_j найдется набор $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ такой, что $u(\lambda_1, ..., \lambda_n) \notin K_j$.**

Множество U_{K_j} таких $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ – дополнение к гиперпространству положительной коразмерности. Взяв точку $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ в пересечении $\bigcap_{K_j} U_{K_j}$, получим примитивную линейную комбинацию x_i. ■

Теорема Вейерштрасса о делении (повторение)

ТЕОРЕМА: (Теорема Вейерштрасса о делении)
Пусть $P(z, z_n)$ – полином Вейерштрасса степени k. **Тогда каждая голоморфная функция F, заданная в окрестности 0, может быть представлена в виде $F = fP + Q$,** где $Q(z, z_n)$ – полином Вейерштрасса, степени, меньшей k.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: После замены системы координат на z', z'_n, можно считать, что $F = uF'$, и $P = vP'$, где $F'(z', z'_n)$ и $P'(z', z'_n)$ – полиномы Вейерштрасса. Деление F в столбик на P' дает $F = v^{-1}PR + Q'$, где $Q'(z', z'_n)$ – полином Вейерштрасса степени, меньшей k. Значит, Q' имеет в 0 нуль порядка, который меньше, чем порядок нуля у F. Воспользовавшись индукцией по порядку нуля у F, можно считать, что Q' уже разложили: $Q' = gP + Q''$. ■

Регулярная система координат: конечность проекции

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $P_{d+1}, ..., P_n$ – полиномы Вейерштрасса, построенные в теореме о регулярной системе координат. **Тогда каждая голоморфная функция $F \in \mathcal{O}_n$ по модулю $P_{d+1}, ..., P_n$ равна линейной комбинации мономов от $z_{d+1}, ..., z_n$ степени меньше $(s_{d+1}, ..., s_n)$ с коэффициентами из $\mathcal{O}_d$.**

Доказательство. Шаг 1: Воспользовавшись индукцией по n, можно считать, что **утверждение следствия доказано для каждой функции, которая зависит только от $z_1, ..., z_{n-1}$.**

Шаг 2: Применив теорему Вейерштрасса о делении, запишем $F = fP_n + Q$, где Q – полином Вейерштрасса, степени, меньшей s_n. **Коэффициенты Q зависят только от $z_1, ..., z_{n-1}$, и в силу шага 1 для них утверждение следствия уже доказано.** ■

Теорема о конечности

СЛЕДСТВИЕ: (Теорема о конечности)
Пусть $z_1, ..., z_n$ – регулярная система координат для идеала $J \subset \mathcal{O}_n$, а $\mathcal{O}_d$ – голоморфные функции, зависящие только от $z_1, ..., z_d$. Тогда **кольцо $\mathcal{O}_n/J$ конечно порождено как $\mathcal{O}_d$-модуль.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Оно порождено конечным числом координатных мономов. ■

ТЕОРЕМА: (теорема о примитивном элементе) Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – простой идеал, такой, что $\mathcal{O}_n/J$ конечно над $\mathcal{O}_d$. **Тогда для почти всех линейных комбинаций $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i \in \mathcal{O}_n/J$, функция u порождает поле частных $k(\mathcal{O}_n/J)$ над полем частных $k(\mathcal{O}_d)$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Следует из теоремы Артина, примененной к $K = k(\mathcal{O}_n/J)$. ■

Регулярные координаты и их реализация гиперповерхностью

ТЕОРЕМА: Пусть J – простой идеал в $\mathcal{O}_n$, а $z_1, ..., z_d, ..., z_n$ регулярная система координат. Рассмотрим отображение $\mathfrak{u}: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{d+1}$, заданное формулой $(z_1, ..., z_n) \xrightarrow{\mathfrak{u}} (z_1, ..., z_d, u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i)$. **Оно задает голоморфное отображение из множества Z общих нулей J на гиперповерхность $Z_u \subset \mathbb{C}^{d+1}$.** К тому же, проекция Z_u на первые d координат конечна (то есть Z_u есть график многозначной функции), а на полях частных $\mathfrak{u}$ действует как изоморфизм $k(\mathcal{O}_n/J) \xrightarrow{\sim} k(\mathcal{O}_{d+1}/(P_u))$.

Доказательство. Шаг 1: Возьмем регулярную систему координат, и рассмотрим проекцию $P_d: Z \longrightarrow \mathbb{C}^d$ на первые d координат. Пусть $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i$ – примитивный элемент, порождающий поле частных $k(\mathcal{O}_n/J)$ над $k(\mathcal{O}_d)$, а $\mathcal{P}_u(t) \in \mathcal{O}_d[t]$ – его минимальный полином. Поскольку u целый, $\mathcal{P}_u(t)$ унитарный (имеет старшим коэффициентом 1). **Обозначим за Z_u множество нулей $\mathcal{P}_u(t)$ в $(z_1, ..., z_d, t)$.**

Шаг 2: Отображение $\mathfrak{u}: \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{d+1}$, $(z_1, ..., z_n) \xrightarrow{\mathfrak{u}} \left(z_1, ..., z_d, u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i\right)$ **переводит Z в множество Z_u общих нулей $\mathcal{P}_u(u)$.** Действительно, если в точке $(z_1, ..., z_n)$ зануляются все элементы J, то $\mathcal{P}_u(u) \in J$ тоже зануляется в $(z_1, ..., z_n)$.

Шаг 3: Изоморфизм полей частных следует из того, что $k(\mathcal{O}_n/J) = k(\mathcal{O}_d[t]/(P_u(t)))$ и теоремы Вейерштрасса о делении. ■

Теорема Гильберта о нулях, для простого идеала

ТЕОРЕМА: Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – простой идеал, Z – множество общих нулей J, а J_Z – множество всех функций, зануляющихся в Z. **Тогда $J_Z = J$.**

Доказательство. Шаг 1: Возьмем регулярную систему координат, и рассмотрим проекцию $P_d: \ Z \longrightarrow \mathbb{C}^d$ на первые d координат. Пусть $u = \sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i$ – примитивный элемент, порождающий поле частных $k(\mathcal{O}_n/J)$ над $k(\mathcal{O}_d)$, а $\mathcal{P}_u(t) \in \mathcal{O}_d[t]$ – его минимальный полином. Поскольку $\mathcal{P}_u(u)$ – полином Вейерштрасса, проекция его нулей в $\mathbb{C}^d$ сюрьективна. Следовательно, проекция Z на первые d координат имеет образ, который не лежит в собственном аналитическом подмножестве $\mathbb{C}^d$. Мы получили, что **ненулевая функция $f \in \mathcal{O}_d$ не может зануляться на Z.**

Шаг 2: Понятно, что $J_Z \supset J$. В силу теоремы о конечности, $\mathcal{O}_n/J$ – конечное расширение $\mathcal{O}_d$. Для каждого $f \in J_Z$, **f удовлетворяет уравнению вида $P(f) = 0$, где $P = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_0 \in \mathcal{O}_d[t]$ – неприводимый полином.** Поскольку f зануляется на Z, и $P(f)$ зануляется на Z, a_0 также зануляется на Z. В силу шага 3, из этого следует, что $a_0 = 0$. Но тогда P не может быть неприводим. ■

Теорема Гильберта о нулях (общая форма)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть J – идеал. Определим **радикал** $\sqrt{J}$ как пересечение всех простых идеалов, содержащих J.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что $a \in \sqrt{J}$ **тогда и только тогда, когда** $a^n \in J$ **для какого-то** $n > 0$.

ТЕОРЕМА: Пусть $J \subset \mathcal{O}_n$ – идеал, а Z_J множество общих нулей J. Тогда f **зануляется на** Z_J **тогда и только тогда, когда** $f \in \sqrt{J}$.

Доказательство. Шаг 1: В силу предыдущего упражнения, $Z_J = Z_{\sqrt{J}}$.

Шаг 2: Пусть $\mathfrak{P}$ – множество простых идеалов, содержащих J. В силу шага 1, имеем $Z_J = Z_{\sqrt{J}} = \bigcup_{J' \in \mathfrak{P}} Z_{J'}$, так как $\sqrt{J} = \bigcap_{J' \in \mathfrak{P}} J'$.

Шаг 3: Если функция зануляется на Z_J, она лежит каком-то из $Z_{J'}$, и в силу "теоремы Гильберта о нулях для простых идеалов" принадлежит J'. ■

Дискриминант минимального многочлена

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $P(t)=\prod_i(t-\alpha_i)$ – полином. **Дискриминант** P есть произведение вида $\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2$, которое выражается как полином от коэффициентов P.

ЛЕММА: Пусть Z – росток неприводимого комплексно-аналитического подмножества, $z_1, ..., z_n$ регулярные координаты, $u=\sum_{i=d+1}^n \lambda_i z_i$ – примитивный элемент, $\mathcal{P}_u(t)$ – его минимальный многочлен, а $D(\mathcal{P}_u)\in\mathcal{O}_d$ – дискриминант $\mathcal{P}_u(t)$. Тогда $D(\mathcal{P}_u)$ **ненулевой.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если $D(\mathcal{P}_u)$ равен нулю, то $\mathcal{P}_u(t)$ имеет общий делитель с его производной, что противоречит минимальности. ■

Дискриминант минимального многочлена (продолжение)

ТЕОРЕМА: Пусть Z – росток неприводимого комплексно-аналитического подмножества, $z_1, ..., z_n$ регулярные координаты, $u = \sum_{i=d+1}^{n} \lambda_i z_i$ – примитивный элемент, $\mathcal{P}_u(t)$ – его минимальный многочлен, степени N, а $D(\mathcal{P}_u) \in \mathcal{O}_d$ – дискриминант $\mathcal{P}_u(t)$. Обозначим за $D_Z \subset \mathcal{O}_d$ множество, где $D(\mathcal{P}_u) = 0$, и пусть P_d – проекция на первые d координат. Тогда в какой-то окрестности нуля **проекция $Z \backslash D_Z \xrightarrow{P_d} \mathbb{C}^d \backslash D_Z$ – неразветвленное N-листное накрытие.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Воспользовавшись отображением $\mathfrak{u}$, построенным в доказательстве теоремы Гильберта о нулях, можно считать, что $n = d+1$. Тогда Z есть множество нулей многочлена $\mathcal{P}_u(t)$, который имеет в $Z \backslash D_Z$ ненулевую производную. Применяя теорему об обратной функции, получаем, что **вне D_Z, отображение $Z \xrightarrow{P_d} \mathbb{C}^d$ этально** (то есть локально является диффеоморфизмом). Наконец, **N-листность этого накрытия в некоторой окрестности 0 следует из аргумента, доказывающего подготовительную теорему Вейерштрасса.**

Неособые точки ростка комплексно-аналитического множества

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество. Назовем точку $z \in Z$ **гладкой**, если в окрестности z, Z – гладкое подмногообразие, и **особой** в противном случае

ТЕОРЕМА: Пусть $Z \subset \mathbb{C}^n$ – комплексно-аналитическое подмножество, а $Z_{sing} \subset Z$ – множество особых точек Z. **Тогда Z_{sing} – комплексно-аналитическое подмножество, а его дополнение плотно и открыто в Z.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Поскольку результат локальный, можно считать, что Z – росток комплексно-аналитического множества. Возьмем регулярные координаты, и пусть D_Z – множество нулей дискриминанта Z. **Вне D_Z, Z неособо, что доказывает плотность и открытость множества гладких точек.**

Пусть теперь $f_1, ..., f_n$ порождают идеал функций, зануляющихся в Z. Тогда Z_{sing} **есть множество, где ранг $\langle df_1, ..., df_n \rangle$ меньше** $\operatorname{codim} Z$, значит, оно комплексно-аналитично. ■

13-го июня экзамен (12:00)! (праздник)