Комплексная алгебраическая геометрия,

лекция 13: ростки многообразий

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

23 мая 2014

Кольцо ростков комплексно-аналитических функций

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $U \subset U'$ – открытые, связные подмножества комплексного многообразия. Докажите, что тогда **соответствующие кольца голоморфных функций** тоже вложены: $\Gamma(\mathcal{O}_{U'}) \subset \Gamma(\mathcal{O}_U)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть – комплексное многообразие, $x \in M$. **Кольцо ростков** комплексно-аналитических функций в x есть объединение колец $\Gamma(\mathcal{O}_U)$ для всех связных открытых подмножеств M, содержащих x. Кольцо ростков аналитических функций на $(\mathbb{C}^n, 0)$ обозначается $\mathcal{O}_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Кольцо называется **локальным**, если в нем есть идеал I (называемый **максимальным идеалом кольца**) такой, что каждый элемент $a \notin I$ обратим.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **кольцо ростков комплексно-аналитических функций локально.**

Подготовительная теорема Вейерштрасса (формулировка)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $z_1, ..., z_n$ – координаты на $\mathbb{C}^n$. **Полином Вейерштрасса** есть функция вида $A_0 + z_n A_1 + ... + z_n^k A_k$, где $A_i \in \mathcal{O}_{n-1}$ – аналитические функции, зависящие только от $z_1, ..., z_{n-1}$. Полином Вейерштрасса часто записывается в виде $P(z, z_n)$, где z обозначает совокупность координат $z_1, ..., z_{n-1}$.

ТЕОРЕМА: (Подготовительная теорема Вейерштрасса) Пусть F – аналитическая функция в окрестности 0 в $\mathbb{C}^n$, такая, что $\frac{F(0,z_n)}{z_n^k}$ имеет ненулевой предел в 0. **Тогда для какого-то полидиска, F можно разложить как $F = u(z)P(z, z_n)$, где u обратима, а P – полином Вейерштрасса со старшим коэффициентом 1.** Более того, такое разложение единственно.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть F – аналитическая функция в окрестности $\mathbb{C}^n$, которая имеет в 0 нуль порядка k (и не больше). Тогда для любого выбора координат, $\frac{F(0,z_n)}{z_n^k}$ конечен, и для почти любого - $\frac{F(0,z_n)}{z_n^k} \neq 0$, что ясно из разложения Тейлора (проверьте). То есть **подготовительная теорема Вейерштрасса применима к любой комплексно-аналитической функции**.

Формула Ньютона

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\alpha_1, ..., \alpha_l$ – набор независимых переменных, а e_i – коэффициенты многочлена $t^l + e_{l-1}t^{l-1} + ... + e_1 t + e_l := \prod_i (t + \alpha_i)$. Тогда e_j называются **элементарными симметрическими полиномами** от α_i.

ТЕОРЕМА: (Тождества Ньютона) Пусть $Q_j := \sum_i \alpha^j$. **Тогда элементарные симметрические полиномы $e_0, ..., e_{l-1}$ полиномиально выражаются через $Q_1, ..., Q_l$,** с рациональными коэффициентами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Имеет место **тождество Ньютона**:

$$ke_k = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i e_{k-i} Q_i.$$

Чтобы это усмотреть, напишем производящую функцию $E(t) := \prod_i (1 - t\alpha_i) = \sum_i (-1)^i t^i e_i$. Дифференцируя по t, получаем

$$\frac{E'(t)}{E(t)} = \sum_i \frac{-\alpha_i}{1 - t\alpha_i t} = -\sum_i \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_i^j t^{j-1}.$$

Пусть $Q(t) := \sum_{j=1}^{\infty} Q_j t^j$. Из предыдущей формулы получаем $tE' = -EQ$, что доказывает тождество Ньютона. ■

Подготовительная теорема Вейерштрасса (доказательство)

ЗАМЕЧАНИЕ: Для доказательства подготовительной теоремы Вейерштрасса, **мы рассматриваем множество нулей F как особое подмногообразие $\mathbb{C}^n$, которое снабжено k-листным разветвленным накрытием над $\mathbb{C}^{n-1}$**, и строим полином Вейерштрасса с тем же множеством нулей.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть f – голоморфная функция на диске, ненулевая на его границе $\partial\Delta$, а $S_k(f) := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial\Delta} \frac{f'}{f} z^k dz$. Тогда $S_k(f) = \sum \alpha_i^k$, где α_i – все нули f, взятые с кратностями.

Указание: Формула Коши.

Доказательство подготовительной теоремы Вейерштрасса:
Поскольку $\frac{F(0,z_n)}{z_n^k}$ имеет ненулевой предел в 0, в некотором полидиске $\Delta(n-1,1) := B_r(z_1, ...z_{n-1}) \times \Delta_{r'}(z_n)$ бирадиуса r, r', $F(z, z_n) \neq 0$, когда $|z_n| = r'$. В этом полидиске мы построим разложение $F = uP$.

Шаг 1: Пусть $\mathfrak{S}_k(z) := S_k(F(z,\cdot))$. где $z \in B_r(z_1, ...z_{n-1})$. В силу формулы Руше (или упражнения выше), **$\mathfrak{S}_0(z)$ равно числу нулей $F(z,\cdot)$ на диске $\Delta_{r'}$**. Поскольку $\mathfrak{S}_0(z)$ непрерывно зависит от z, **число нулей постоянно.**

Доказательство подготовительной теоремы Вейерштрасса (продолжение)

Шаг 2: Пусть $e_l(z)$ – элементарные полиномы от этих нулей, обозначенных за $\alpha_i(z)$. В силу упражнения выше, сумма l-х степеней $\alpha_i(z)$ равна $\mathfrak{S}_l(z)$. **Воспользовавшись тождеством Ньютона, мы выразим $e_l(z)$ через $\mathfrak{S}_l(z)$, получив голоморфные функции от $z_1, ..., z_{n-1}$.**

Шаг 2: Пусть $P(z, z_n) := z_n^k + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i e_i(z) z^i$. Поскольку $P(z, z_n)$ имеет те же нули, что и F, и с теми же кратностями, **их частное обратимо в $\Delta(n-1, 1)$.** ■

Теорема Вейерштрасса о делении

ТЕОРЕМА: (Теорема Вейерштрасса о делении) Пусть $P(z, z_n)$ – полином Вейерштрасса степени k. **Тогда каждая голоморфная функция F, заданная в окрестности 0, может быть представлена в виде $F = fP + Q$,** где $Q(z, z_n)$ – полином Вейерштрасса, степени, меньшей k.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: После замены системы координат на z', z'_n, можно считать, что $F = uF'$, и $P = vP'$, где $F'(z', z'_n)$ и $P'(z', z'_n)$ – полиномы Вейерштрасса. Деление F в столбик на P' дает $F = v^{-1}PR + Q'$, где $Q'(z', z'_n)$ – полином Вейерштрасса степени, меньшей k. Значит, Q' имеет в 0 нуль порядка, который меньше, чем порядок нуля у F. Воспользовавшись индукцией по порядку нуля у F, можно считать, что Q' уже разложили: $Q' = gP + Q''$. ∎

Факториальность кольца $\mathcal{O}_n$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $f \in \mathcal{O}_n$ – элемент кольца ростков голоморфных функций он n переменных. **Тогда f разлагается в произведение $f = f_1 ... f_N$ неразложимых функций,** причем **такое разложение единственно.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно доказать это, когда f – полином Вейерштрасса. Разложив f в произведение неприводимых полиномов, получим искомое разложение $f = f_1 ... f_N$. Осталось доказать единственность.

Шаг 1: Воспользовавшись индукцией, **можно считать, что $\mathcal{O}_{n-1}$ факториально.** Из этого, по лемме Гаусса, следует факториальность $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.

Шаг 2: Пусть g – неразложимый элемент, который делит произведение неразложимых элементов ff'. Воспользовавшись подготовительной теоремой Вейерштрасса, можно считать, что f, f', g – полиномы Вейерштрасса. Тогда **g делит ff' в кольце $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.** Поскольку это кольцо факториально, из этого следует, что f либо f' делит g. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Иначе говоря, кольцо $\mathcal{O}_n$ **факториально** (в нем однозначно разложение на простые сомножители).

Нетеровы кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Коммутативное кольцо R называется **нетеровым**, если каждый идеал в R конечно порожден.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть R – нетерово кольцо, а M – конечно-порожденный R-модуль. Докажите, что любой подмнодуль M конечно порожден.

ТЕОРЕМА: (Emanuel Lasker, 1905) Кольцо $\mathcal{O}_n$ ростков голоморфных функций нетерово.

Доказательство. Шаг 1: Пусть $I \subset \mathbb{R}$ – идеал, а $P \in I$ – ненулевой элемент. По подготовительной теореме Вейерштрасса, P есть полином Вейерштрасса, с точностью до обратимой функции; поэтому можно считать, что $P = P(z, z_n)$ есть полином Вейерштрасса, степени k. По теореме о делении, **кольцо $\mathcal{O}_n/(P)$ порождено $1, z_n, z_n^2, ..., z_n^{k-1}$ над $\mathcal{O}_{n-1}$.**

Шаг 2: Значит, **$\mathcal{O}_n/(P)$ конечно-порожден как модуль над $\mathcal{O}_{n-1}$.**

Шаг 3: Воспользовавшись индукцией, можно считать, что $\mathcal{O}_{n-1}$ нетерово. Поэтому **образ $\pi(I)$ в $\mathcal{O}_n/(P)$ конечно порожден над $\mathcal{O}_{n-1}$.**

Шаг 4: Пусть $\xi_1, ..., \xi_N$ образующие $\pi(I)$, а $\tilde{\xi}_1, ..., \tilde{\xi}_N$ их прообразы в I. Тогда $P, \tilde{\xi}_1, ..., \tilde{\xi}_N$ **порождает I.** ■

Комплексно-аналитические множества и их ростки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексно-аналитическое подмножество** комплексного многообразия M есть замкнутое подмножество $Z \subset M$, которое локально биголоморфно подмножеству в $U \subset \mathbb{C}^n$, заданному как множество общих нулей какого-то идеала $I \subset \mathcal{O}_U$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $Z_1, Z_2 \subset M$ комплесно-аналитические подмногообразия. Они называются **эквивалентными в x**, если $Z_1 \cap U = Z_2 \cap U$ для какой-то окрестности $U \ni x$. **Росток комплексно-аналитического подмножества** в $x \in M$ есть класс эквивалентности комплексно-аналитических подмножеств $Z \subset U \ni x$ по отношению к "эквивалентности в x."

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Росток комплексно-аналитического подмножества Z в $x \in M$ называется **неприводимым**, если не существует нетривиального разложения $Z = A_1 \cup A_2$ на два комплексно-аналитических подмножества.

Примарное разложение ростков комплексно-аналитических множеств

УТВЕРЖДЕНИЕ: Росток комплексно-аналитического подмножества Z **неприводим тогда и только тогда, когда идеал I_Z ростков функций, зануляющихся в Z, простой.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если есть нетривиальное разложение $Z = A_1 \cup A_2$, то найдутся функции f_1, f_2, зануляющиеся на одном из A_i, но не на другом; **в этом случае $f_1 f_2 \in I_Z$, значит, I_Z не простой.**

Наоборот, если идеал I_Z не простой, найдутся $f_1, f_2 \notin I_Z$, такие, что $f_1 f_2 \in I_Z$; тогда **соответствующие множества нулей удовлетворяют $V_{f_1} \cup V_{f_2} \supset I_Z$, значит, $(V_{f_1} \cap I_Z) \cup (V_{f_2} \cap I_Z)$ – нетривиальное разложение.** ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $Z_1 \supsetneq Z_2 \supsetneq Z_3 \supsetneq ...$ – убывающая цепочка ростков комплексно-аналитических множеств. **Тогда она обрывается.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Следует из нетеровости. ■

СЛЕДСТВИЕ: Каждый росток комплексно-аналитического множества разлагается в конечное объединение неприводимых. ■