Комплексная алгебраическая геометрия,

лекция 11: теорема Кодаиры о вложении

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

26 апреля 2014

$\overline{\partial}$-оператор на расслоении (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть M – комплексное многообразие. Тогда **оператор** $\overline{\partial}: C^\infty M \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M)$ $\mathcal{O}_M$**-линейный**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – голоморфное расслоение. Рассмотрим оператор $\overline{\partial}: B_{C^\infty} \longrightarrow B_{C^\infty} \otimes \Lambda^{0,1}(M)$, переводящий $b \otimes f$ в $b \otimes \overline{\partial} f$, где $b \in B$ голоморфное сечение, а f гладкая функция. Этот оператор зовется **оператор голоморфной структуры** на голоморфном расслоении. **Он определен корректно в силу $\mathcal{O}_M$-линейности $\overline{\partial}$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **$\overline{\partial}$-оператор** на гладком комплексном векторном расслоении V над есть оператор $V \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$, удовлетворяющий $\overline{\partial}(fb) = \overline{\partial}(f) \otimes b + f\overline{\partial}(b)$ для любых $f \in C^\infty M, b \in V$.

Интегрируемость $\overline{\partial}$-оператора (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: $\overline{\partial}$-оператор **можно продолжить до**

$$\overline{\partial}:\ \Lambda^{0,i}(M)\otimes V \longrightarrow \Lambda^{0,i+1}(M)\otimes V,$$

по формуле $\overline{\partial}(\eta\otimes b)=\overline{\partial}(\eta)\otimes b+(-1)^{\tilde{\eta}}\eta\wedge\overline{\partial}(b)$, где $b\in V$ и $\eta\in\Lambda^{0,i}(M)$.

ТЕОРЕМА: (Мальгранж, Атья-Ботт) Пусть $\overline{\partial}:\ V\longrightarrow\Lambda^{0,1}(M)\otimes V$ – $\overline{\partial}$-оператор на комплексном векторном расслоении, причем $\overline{\partial}^2=0$. **Тогда** $B:=\ker\overline{\partial}\subset V$ **есть голоморфное расслоение того же ранга, и** $V=B_{C^\infty}$**.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:
$\overline{\partial}$-оператор называется **интегрируемым**, если $\overline{\partial}^2=0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы получили **эквивалентность категории голоморфных расслоений, и категории гладких комплексных расслоений, снабженных интегрируемым $\overline{\partial}$-оператором.**

Связность и голоморфная структура (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V – гладкое комплексное расслоение со связностью $\nabla : V \longrightarrow \Lambda^1(M) \otimes V$ и голоморфной структурой $\overline{\partial} : V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$. Рассмотрим разложение ∇ по типам, $\nabla = \nabla^{0,1} + \nabla^{1,0}$, где

$$\nabla^{0,1} : V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V, \quad \nabla^{1,0} : V \longrightarrow \Lambda^{1,0}(M) \otimes V.$$

Говорится, что ∇ **совместима с голоморфной структурой**, если $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эрмитово голоморфное расслоение** есть гладкое комплексное расслоение, снабженное эрмитовой метрикой и голоморфной структурой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Связность Черна** на эрмитовом голоморфном расслоении есть связность, совместимая с голоморфной структурой и сохраняющая метрику.

ТЕОРЕМА: На каждом голоморфном эрмитовом расслоении **связность Черна существует и единственна.**

Кривизна связности Черна (повторение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Кривизна Θ_B связности Черна есть (1,1)-форма: $\Theta_B = \{\nabla^{1,0}, \overline{\partial}\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из дифференциального тождества Бьянки вытекает, что **кривизна линейного голоморфного расслоения - замкнутая (1,1)-форма.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть L – линейное расслоение, $b \in L$ – нигде не зануляющееся голоморфное сечение. **Тогда существует $(1,0)$-форма η такая, что $\nabla^{1,0}b = \eta \otimes b$.** Это дает $d|b|^2 = \operatorname{Re} g(\nabla^{1,0}b, b) = \operatorname{Re}\eta|b|^2$. **Мы получили $\nabla^{1,0}b = \frac{\partial|b|^2}{|b|^2}b = 2\partial\log|b|b$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – линейное эрмитово расслоение, а b - незануляющееся голоморфное сечение. Тогда $\nabla^{1,0}b = \frac{\partial|b|^2}{|b|^2}b = 2\partial\log|b|b$, что дает $\Theta_B(b) = 2\overline{\partial}\partial\log|b|b$, **то есть $\Theta_B = -2\partial\overline{\partial}\log|b|$.**

СЛЕДСТВИЕ: Если $g' = e^{2f}g$ – две метрики на голоморфном линейном расслоении, а Θ, Θ' – соответствующая кривизна, то **$\Theta' - \Theta = -2\partial\overline{\partial}f$.**

Кривизна линейного расслоения

ТЕОРЕМА: ("dd^c-лемма")
Пусть η - форма на компактном кэлеровом многообразии, которая удовлетворяет какому-то из условий
1. η – точная (p,q)-форма. 2. η – d^c-точная, d-замкнутая.
3. η – ∂-точная, $\overline{\partial}$-замкнутая.
Тогда $\eta \in \operatorname{im} dd^c = \operatorname{im} \partial\overline{\partial}$.

Доказательство см. в лекции 7.

Предложение 1: Пусть ω – (1,1)-форма с целочисленным классом когомологий на компактном кэлеровом многообразии. **Тогда ω есть кривизна голоморфного линейного расслоения.**

Доказательство. Шаг 1: Экспоненциальная точная последовательность $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_M \longrightarrow \mathcal{O}_M \longrightarrow \mathcal{O}_M^* \longrightarrow 0$ дает

$$H^1(\mathcal{O}_M^*) \xrightarrow{c} H^2(M,\mathbb{Z}) \xrightarrow{p} H^2(M,\mathcal{O}_M),$$

причем $H^1(\mathcal{O}_M^*) = \operatorname{Pic}(M)$ есть группа линейных расслоений, c – отображение, переводящее расслоение в его первый класс Черна, а p – проекция $H^2(M)$ на компоненту Ходжа $H^2(M,\mathcal{O}_M) = H^{0,2}(M)$. Значит, **для любого целочисленного класса $[\omega] \in H^{1,1}(M)$, $[\omega]$ является первым классом Черна голоморфного линейного расслоения L.**

Кривизна линейного расслоения (2)

Предложение 1: Пусть ω – (1,1)-форма с целочисленным классом когомологий на компактном кэлеровом многообразии. **Тогда ω есть кривизна голоморфного линейного расслоения.**

Шаг 1: Для любого целочисленного класса $[\omega] \in H^{1,1}(M)$, $[\omega]$ является первым классом Черна линейного расслоения L (см. предыдущий слайд).

Шаг 2: Возьмем любую метрику h на L. Ее кривизна ω_h есть замкнутая $(1,1)$-форма, когомологичная ω. В силу dd^c-леммы, $\omega_h - \omega = -2\partial\overline{\partial} f$ **для какой-то функции f.**

Шаг 3: В силу доказанного выше, если $g' = e^{2f} g$ – две метрики на голоморфном линейном расслоении, а Θ, Θ' – соответствующая кривизна, то $\Theta' - \Theta = -2\partial\overline{\partial} f$.

Шаг 4: Рассмотрим метрику $h' := e^{2f} h$ на L. **Соответствующая ей кривизна удовлетворяет $\omega_h - \omega_{h'} = -2\partial\overline{\partial} f$, значит, $\omega = \omega_{h'}$.** ■

Положительные линейные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Голоморфное линейное расслоение называется **положительным**, если его первый класс Черна когомологичен кэлеровой форме.

ТЕОРЕМА: (теорема Кодаиры-Накано)
Пусть L – положительное линейное расслоение на компактном кэлеровом многообразии. **Тогда для любого расслоения B найдется $N > 0$ такое, что $H^i(B \otimes L^N) = 0$ для любого $i > 0$.**

Было доказано в прошлый раз.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть (M, ω) – кэлерово многообразие, такое, что класс ω в когомологиях де Рама рационален. **Тогда M допускает положительное голоморфное расслоение.**

Доказательство: Следует из Предложения 1. ∎

Когерентные пучки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пучок F $\mathcal{O}_M$-модулей называется **конечно-порожденным**, если у каждой точки есть окрестность U такая, что $F|_U$ изоморфен фактору $\mathcal{O}_U^n$ по подпучку F_1, и **конечно-представимым**, если F_1 тоже конечно-порожден. **Когерентный пучок** на комплексном многообразии M есть конечно-порожденный и конечно-представимый пучок $\mathcal{O}_M$-модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пучок-небоскреб** есть когерентный пучок с носителем в точке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пучок идеалов** есть когерентный подпучок в $\mathcal{O}_M$. Обозначим за $\mathfrak{m}_x^n$ **пучок идеалов вида** $(\mathfrak{m}_x)^n$, где $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_M$ есть идеал функций, зануляющихся в x.

ЗАМЕЧАНИЕ: (Теорема Гильберта о сизигиях)
На n-мерном проективном многообразии, любой когерентный пучок F **допускает локально свободную резольвенту длины** n, то есть точную последовательность вида

$$0 \longrightarrow B_n \longrightarrow B_{n-1} \longrightarrow ... \longrightarrow B_0 \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

Обильные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Голоморфное линейное расслоение L на проективном многообразии называется **обильным**, если для любого голоморфного расслоения B найдется N такое, что $H^i(B \otimes L^N) = 0$ для любого $i > 0$.

Утверждение 1: Пусть L – обильное расслоение на проективном многообразии, а F – когерентный пучок. Тогда **найдется N такое, что $H^i(F \otimes L^N) = 0$ для любого $i > 0$.**

Доказательство. Шаг 1: Обозначим за $\operatorname{fd}(F)$ минимальную длину локально свободной резольвенты пучка F. **Локально свободная резольвента дает точную последовательность**

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow B \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

где $\operatorname{fd}(F_1) = \operatorname{fd}(F) - 1$. Индукцией по $\operatorname{fd}(F)$, можно считать, что $H^i(F_1 \otimes L^N) = H^i(B \otimes L^N) = 0$ для любого $i > 0$.

Шаг 2: Из длинной точной последовательности

$$... \longrightarrow H^i(B \otimes L^N) \longrightarrow H^i(F \otimes L^N) \longrightarrow H^{i+1}(F_1 \otimes L^N) \longrightarrow ...$$

получаем, что $H^i(F \otimes L^N) = 0$. ■

Проективные вложения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Сечение f расслоения B **равно нулю в x** если $f \in \mathfrak{m}_x B$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Линейное расслоение **очень обильно**, если $H^1(L \otimes I) = 0$ для пучков идеалов I вида $\mathfrak{m}_x \cap \mathfrak{m}_y$ и $\mathfrak{m}_x^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Линейное расслоение L на M **разделяет точки** если для любых точек $x \neq y$ найдется сечение $f \in \Gamma_M(L)$, которое не равно нулю в x и не равно в y.

ЗАМЕЧАНИЕ: Очень обильное расслоение на проективном многообразии разделяет точки. Это ясно из длинной точной последовательности

$$0 \longrightarrow H^0(L \otimes I) \longrightarrow H^0(L) \longrightarrow H^0(L \otimes (\mathcal{O}_M/I)) \longrightarrow H^1(L \otimes I) \longrightarrow ...$$

где I есть $\mathfrak{m}_x \cap \mathfrak{m}_y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть L – линейное расслоение на M, разделяющее точки, а V – пространство его сечений. Для $x \in M$, рассмотрим спаривание $\langle (L/\mathfrak{m}_x L)^*, V\rangle$, которое берет $f \in V$ и вычисляет $\lambda \in (L/\mathfrak{m}_x L)^*$ на его представителе в $L/\mathfrak{m}_x L$. Мы получили функционал на V. Соответствующее отображение $x \xrightarrow{\varphi_L} \mathbb{P}V^*$, называется **проективным вложением, связанным с L**.

Проективные вложения (продолжение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть L разделяет точки. Тогда $\varphi_L : M \longrightarrow \mathbb{P}V^*$ инъективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $f \in V$ – сечение, разделяющее x и y. Тогда f задает плоскость $H_f \subset V^*$, причем $\varphi_L(x)$ не лежит в этой плоскости, а $\varphi_L(y)$ лежит в ней. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Определим **тавтологическое расслоение** как голоморфное расслоение, слои которого в точках $x_0 : x_1 : ... : x_n$ отождествлены с прямой $(\lambda x_0, \lambda x_1, ..., \lambda x_n)$. Определим $\mathcal{O}(1)$ как линейное расслоение на $\mathbb{C}P^n$, которое двойственно тавтологическому.

Упражнение 1: Пусть $j : M \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ – проективное вложение, связанное с каким-то расслоением L. **Докажите, что $j^*\mathcal{O}(1) = L$.**

Очень обильные расслоения

Утверждение 2: Пусть L очень обильно. Тогда $\varphi_L: \ M \longrightarrow \mathbb{P}V^*$ – замкнутое вложение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: По теореме об обратной функции, **достаточно доказать, что дифференциал φ_L инъективен**. По определению, $d\varphi_L$ переводит $\lambda \in TxM = (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ в точку $T_{\varphi_L(x)}\mathbb{P}V^* = \operatorname{Hom}(W^*, V^*/W^*)$, где $W^* := (L/\mathfrak{m}_x L)^*$ есть прямая в V^*, соответствующая $\varphi_L(x)$:

$$(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^* \xrightarrow{d\varphi_L} \operatorname{Hom}(W^*, V^*/W^*).$$

Дуализируя обе части, получаем $V_x \xrightarrow{d\varphi_L^*} \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \otimes_{\mathbb{C}} (L/\mathfrak{m}_x L)$, где $V_x = \ker W^*$ есть пространство всех сечений L, зануляющихся в x.

Рассмотрим естественное отображение $V = H^0(L) \longrightarrow H^0(L \otimes (\mathcal{O}_M/I))$, где $I = \mathfrak{m}_x^2$. Оно дает

$$V_x = H^0(\mathfrak{m}_x L) \longrightarrow H^0(\mathfrak{m}_x L \otimes (\mathcal{O}_M/I)) = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \otimes_{\mathbb{C}} (L/\mathfrak{m}_x L).$$

Это и есть $d\varphi_L^*$.

Мы получили, что **инъективность $d\varphi_L$ следует из сюрьективности $H^0(L) \longrightarrow H^0(L \otimes (\mathcal{O}_M/I))$.** ■

Теорема Кодаиры о вложении

ТЕОРЕМА: (теорема Кодаиры)
Пусть L – положительное расслоение на компактном комплексном многообразии M. Тогда **какая-то степень L определяет проективное вложение.**

Наборосок доказательства (в проективном случае). Шаг 1:
По теореме Кодаиры-Накано, для каждого расслоения B найдется N такое, что $H^i(B \otimes L^N) = 0$ для всех $i > 0$. Из Утверждения 1 следует, что то же верно и для любого когерентного пучка F: $H^i(F \otimes L^N) = 0$.

Шаг 2: Значит, когомологии $L^N \otimes \mathfrak{m}_x \cap \mathfrak{m}_y$ и $L^N \otimes \mathfrak{m}_x^n$. Немного повозившись, можно найти N, общее для всех x, y.

Шаг 3: Утверждение 2 дает голоморфное вложение $j : M \longrightarrow \mathbb{C}P^n$. ■

Теорема Кодаиры о вложении (2)

СЛЕДСТВИЕ: (теорема Кодаиры)
Пусть M – кэлерово многообразие, причем класс когомологий кэлеровой формы целый. **Тогда M проективно.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Используя предложение 1, находим расслоение, кривизна которого пропорциональна кэлеровой форме. Оно положительно. Затем используем предыдущую теорему. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: В проективной ситуации для зануления когомологий $L^N \otimes \mathfrak{m}_x \cap \mathfrak{m}_y$ и $L^N \otimes \mathfrak{m}_x^n$ мы пользовались резольвентами. Зануление когомологий когерентных пучков в кэлеровой (непроективной) ситуации не может быть доказано через локально свободные резольвенты, потому что их нет. Вместо них используются пучки мультипликаторных идеалов (multiplier ideal sheaves), которые (а) работают в кэлеровой ситуации и (б) позволяют существенно упрощать даже те доказательства, которые в проективной ситуации делаются классическими методами.