Комплексная алгебраическая геометрия,

лекция 10: теорема Кодаиры-Накано

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

18 апреля 2014

Векторные расслоения (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Векторное расслоение** на гладком многообразии есть локально тривиальный пучок $C^\infty M$-модулей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Тотальное пространство** $\operatorname{Tot} B$ векторного расслоения есть пространство всех пар $x \in M, b \in B_x/\mathfrak{m}_x B$, где B_x означает пространство ростков B в x, а $\mathfrak{m}_x$ – максимальный идеал, снабженное естественной топологией и гладкой структурой. **Тотальное пространство расслоения гладко расслоено над M** со слоем $B_x/\mathfrak{m}_x B = \mathbb{R}^n$, где n есть ранк B. **Слой** векторного расслоения в точке x есть $B_x/\mathfrak{m}_x B$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Сечением** гладкого расслоения называется гладкое отображение $M \longrightarrow \operatorname{Tot} B$, переводящее $x \in M$ в точку $(x \in M, b \in B_x/\mathfrak{m}_x B)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Множество сечений гладкого расслоения **естественно отождествлено с множеством сечений соответствующего пучка.**

$\overline{\partial}$-оператор на расслоении (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть M – комплексное многообразие. Тогда **оператор** $\overline{\partial}: C^\infty M \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M)$ $\mathcal{O}_M$**-линейный**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть B – голоморфное расслоение. Рассмотрим оператор $\overline{\partial}: B_{C^\infty} \longrightarrow B_{C^\infty} \otimes \Lambda^{0,1}(M)$, переводящий $b \otimes f$ в $b \otimes \overline{\partial} f$, где $b \in B$ голоморфное сечение, а f гладкая функция. Этот оператор зовется **оператор голоморфной структуры** на голоморфном расслоении. **Он определен корректно в силу $\mathcal{O}_M$-линейности $\overline{\partial}$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **$\overline{\partial}$-оператор** на гладком комплексном векторном расслоении V над есть оператор $V \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,1}(M) \otimes V$, удовлетворяющий $\overline{\partial}(fb) = \overline{\partial}(f) \otimes b + f\overline{\partial}(b)$ для любых $f \in C^\infty M, b \in V$.

Интегрируемость $\overline{\partial}$-оператора (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: $\overline{\partial}$-оператор **можно продолжить до**

$$\overline{\partial}:\ \Lambda^{0,i}(M)\otimes V \longrightarrow \Lambda^{0,i+1}(M)\otimes V,$$

по формуле $\overline{\partial}(\eta\otimes b)=\overline{\partial}(\eta)\otimes b+(-1)^{\tilde{\eta}}\eta\wedge\overline{\partial}(b)$, где $b\in V$ и $\eta\in\Lambda^{0,i}(M)$.

ТЕОРЕМА: (Мальгранж, Атья-Ботт) Пусть $\overline{\partial}:\ V\longrightarrow\Lambda^{0,1}(M)\otimes V$ – $\overline{\partial}$-оператор на комплексном векторном расслоении, причем $\overline{\partial}^2=0$. **Тогда $B:=\ker\overline{\partial}\subset V$ есть голоморфное расслоение того же ранга, и $V=B_{C^\infty}$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: $\overline{\partial}$-оператор называется **интегрируемым**, если $\overline{\partial}^2=0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы получили **эквивалентность категории голоморфных расслоений, и категории гладких комплексных расслоений, снабженных интегрируемым $\overline{\partial}$-оператором.**

Связность и голоморфная структура (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V – гладкое комплексное расслоение со связностью $\nabla : V \longrightarrow \Lambda^1(M)\otimes V$ и голоморфной структурой $\overline{\partial} : V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M)\otimes V$. Рассмотрим разложение ∇ по типам, $\nabla = \nabla^{0,1} + \nabla^{1,0}$, где

$$\nabla^{0,1} : V \longrightarrow \Lambda^{0,1}(M) \otimes V, \quad \nabla^{1,0} : V \longrightarrow \Lambda^{1,0}(M) \otimes V.$$

Говорится, что ∇ **совместима с голоморфной структурой**, если $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Эрмитово голоморфное расслоение** есть гладкое комплексное расслоение, снабженное эрмитовой метрикой и голоморфной структурой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Связность Черна** на эрмитовом голоморфном расслоении есть связность, совместимая с голоморфной структурой и сохраняющая метрику.

ТЕОРЕМА: На каждом голоморфном эрмитовом расслоении **связность Черна существует и единственна.**

Тождество Бьянки (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: $[\nabla, \{\nabla, \nabla\}] = [\{\nabla, \nabla\}, \nabla] + [\nabla, \{\nabla, \nabla\}] = 0$ по супер-тождеству Якоби. Это дает **тождество Бианки**: $\nabla(\Theta_B \wedge \eta) = \Theta_B \wedge \nabla(\eta)$.

Если B – линейное расслоение, то $\operatorname{End} B$ тривиально, и Θ_B есть 2-форма.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Кривизна линейного расслоения – замкнутая 2-форма.

ЗАМЕЧАНИЕ: Аналогично доказывается, что $\operatorname{Tr}_B \Theta_B^i$ **есть замкнутая форма,** где Tr_B обозначает след в $\operatorname{End}(B)$, а Θ_B^i – i-я степень $\operatorname{End}(B)$-значной формы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Классы когомологий $\operatorname{Tr}_B \Theta_B^i$ называются **характеристическими классами** расслоения ("формула Гаусса-Бонне"). Если B – линейное расслоение, то класс $-\frac{\sqrt{-1}}{\pi}\Theta_B$ называется **первым классом Черна** B, и обозначается $c_1(B)$.

Кривизна связности Черна (повторение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: **Кривизна Θ_B связности Черна есть (1,1)-форма.**

СЛЕДСТВИЕ: Для связности Черна ∇, имеем $\Theta_B = \{\nabla^{1,0}, \bar\partial\}$.

СЛЕДСТВИЕ: **Кривизна линейного голоморфного расслоения - замкнутая (1,1)-форма.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть L – линейное расслоение, $b \in L$ – нигде не зануляющееся голоморфное сечение. **Тогда существует $(1,0)$-форма η такая, что $\nabla^{1,0}b = \eta \otimes b$.** Это дает $d|b|^2 = \operatorname{Re} g(\nabla^{1,0}b, b) = \operatorname{Re} \eta |b|^2$. **Мы получили** $\nabla^{1,0}b = \frac{\partial|b|^2}{|b|^2} b = 2\partial \log|b| b$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – линейное эрмитово расслоение, а b - незануляющееся голоморфное сечение. Тогда $\nabla^{1,0}b = \frac{\partial|b|^2}{|b|^2} b = 2\partial \log|b| b$, что дает $\Theta_B(b) = 2\bar\partial\partial \log|b| b$, **то есть** $\Theta_B = -2\partial\bar\partial \log|b|$.

СЛЕДСТВИЕ: Если $g' = e^{2f} g$ – две метрики на голоморфном линейном расслоении, а Θ, Θ' – соответствующая кривизна, то $\Theta' - \Theta = -2\partial\bar\partial f$.

Суперсимметрия в кэлеровой геометрии (повторение)

Пусть (M, I, ω) – кэлерово многообразие. Рассмотрим операторы, действующие на $\Lambda^*(M)$:
1. d, $d^* := - * d *$, $\Delta := dd^* + d^* d$
2. **Оператор Ходжа** $L(\alpha) := \omega \wedge \alpha$ и его сопряженный $\Lambda(\alpha) := *L * \alpha$.
3. **Оператор Вейля:** $\mathcal{W}\Big|_{\Lambda^{p,q}(M)} = \sqrt{-1}\,(p-q)$.

ТЕОРЕМА: ("Кэлеров пакет")
Эти операторы порождают 9-мерную супералгебру Ли $\mathfrak{a}$, действующую на $\Lambda^*(M)$. Нечетные операторы $d, d^c, d^*, (d^c)^*$ порождают **нечетную алгебру Гейзенберга**, у которой есть ровно два нетривиальных коммутатора: $\{d, d^*\} = \{d^c, (d^c)^*\} = \Delta$ (оператор Лапласа), причем Δ лежит в центре $\mathfrak{a}$. Все нетривиальные коммутаторы четных операторов получаются из соотношений в тройке Лефшеца, а ненулевые коммутаторы четных и нечетных устроены так: $[W, d] = d^c$, $[\Lambda, d] = -d^c$, плюс еще 6 соотношений, которые получаются из этих подкруткой на I и на $*$.

Координатные операторы (повторение)

Пусть V – евклидово пространство, v_i – его базис, $e_{v_i}: \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^{k+1} V$ оператор умножения на v_i, $e_{v_i}(\eta) = e_i \wedge \eta$. а $i_{v_i}: \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^{k-1} V$ сопряженный оператор, $i_{v_i} = *e_{v_i}*$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Операторы e_{v_i}, i_{v_i}, Id задают базис в **нечетной супералгебре Гейзенберга $\mathfrak{H}$**, где единственный нетривиальный суперкоммутатор задается $\{e_{v_i}, i_{v_j}\} = \delta_{i,j} \operatorname{Id}$.

Пусть теперь V, I, g – эрмитово n-мерное векторное пространство, а $\omega = \sum_{i=1}^n v_{2i-1} \wedge v_{2i}$ – эрмитова форма. Определим **операторы Ходжа** $L(\alpha) = \omega \wedge \alpha$, и $\Lambda := L^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из соотношений в $\mathfrak{H}$, немедленно следует, что $H := [L, \Lambda] = \left[\sum e_{v_{2i-1}} e_{v_{2i}}, \sum i_{v_{2i-1}} i_{v_{2i}}\right] = \sum_{i=1}^{2n} e_{v_i} i_{v_i} - \sum_{i=1}^{2n} i_{v_i} e_{v_i}$, **скалярный оператор, действующий на k-формах умножением на $n-k$.**

СЛЕДСТВИЕ: Операторы L, Λ, H образуют алгебру Ли, изоморфную $\mathfrak{sl}(2)$, с соотношениями $[L, \Lambda] = H$, $[H, L] = 2L$, $[H, \Lambda] = -2\Lambda$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: L, Λ, H называется **$\mathfrak{sl}(2)$-тройкой Лефшеца**.

Соотношения Кодаиры

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – голоморфное эрмитово расслоение, снабженное связностью Черна $\nabla = \overline{\partial} + \partial$, где $\partial = \nabla^{1,0}$. **Тогда на B-значных формах имеем**

$$[\Lambda, \partial] = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}^*, \quad [\Lambda, \overline{\partial}] = -\sqrt{-1}\,\partial^*, \quad [L, \overline{\partial}^*] = -\sqrt{-1}\,\partial, \quad [L, \partial^*] = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно доказать, например, что $[L, \partial^*] = -\sqrt{-1}\,\overline{\partial}$. Пусть $\mathfrak{E}: \Lambda^i M \otimes B \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^{i+1}(M) \otimes B$ – умножение, $\mathfrak{I}: \Lambda^i M \otimes B \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^{i-1}(M) \otimes B$ – подстановка двойственного векторного поля. **Тогда $\overline{\partial}(\eta) = \mathfrak{E}^{0,1}(\nabla(\eta))$, а $\partial^*(\eta) = \mathfrak{I}^{-1,0}(\nabla(\eta))$.** Связность тут берется Леви-Чивита по $\Lambda^*(M)$ и Черна по B, а $(*)^{p,q}$ означает ходжеву компоненту оператора.

Шаг 2: Поскольку ∇ коммутирует с L, имеем $[L, \partial^*] = [L, \mathfrak{I}^{-1,0}] \circ \nabla$, где $L: \Lambda^i M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^{i+2} M \otimes \Lambda^1 M$ действует по первому сомножителю. Выписав ортонормированный базис z_i в $\Lambda^{1,0}$, получим $L = -\sqrt{-1}\sum e_{z_i} e_{\overline{z}_i}$, а $[e_x, \mathfrak{I}] = 1$ в силу соотношений супералгебры Гейзенберга, порожденной e_i, i_k. Это дает $[L, \mathfrak{I}^{-1,0}](z_i \otimes \eta) = -\sqrt{-1}\,e_{\overline{z}_i}$ и $[L, \mathfrak{I}^{-1,0}](\overline{z}_i \otimes \eta) = 0$, **то есть $[L, \mathfrak{I}^{-1,0}](a \otimes \eta) = -\sqrt{-1}\,\mathfrak{E}^{0,1}(a \otimes \eta)$.**

Шаг 3: С другой стороны, $\overline{\partial}(\eta) = \mathfrak{E}^{0,1}(\nabla(\eta))$. Подставляя сюда заключения шага 1 и шага 2, получаем $[L, \partial^*] = -\sqrt{-1}\,\overline{\partial}$. ∎

Теория Ходжа (с коэффициентами в расслоениями)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\overline{\partial}: \Lambda^{p,q}(M)\otimes B \longrightarrow \Lambda^{p,q+1}(M)\otimes B$ – оператор комплексной структуры. Антикоммутатор $\Delta_{\overline{\partial}} := \{\overline{\partial}, \overline{\partial}^*\} = \overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}$ называется **Лапласианом Дольбо с коэффициентами в расслоении** B на M. Это самосопряженный, положительно определенный оператор: $(\Delta_{\overline{\partial}}x, x) = (\overline{\partial}x, \overline{\partial}x) + (\overline{\partial}^*x, \overline{\partial}^*x)$.

Основная теорема теории Ходжа с коэффициентами: Существует **базис в гильбертовом пространстве** $L^2(\Lambda^*(M)\otimes B)$, состоящий из собственных векторов Δ, и каждое собственное пространство конечномерно.

ТЕОРЕМА: ("Эллиптическая регулярность") Пусть $\alpha \in L^2(\Lambda^*(M)\otimes B)$ – собственный вектор Δ. **Тогда α – гладкая форма.**

Теория Ходжа и когомологии

Определение: Форма α с коэффициентами в B называется **$\overline{\partial}$-гармонической**, если $\Delta_{\overline{\partial}}(\alpha) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любой гармонической формы α, $0 = (\Delta_{\overline{\partial}}\alpha, \alpha) = (\overline{\partial}\alpha, \overline{\partial}\alpha) + (\overline{\partial}^*\alpha, \overline{\partial}^*\alpha)$, значит, $\alpha \in \ker \overline{\partial} \cap \ker \overline{\partial}^*$. Получаем, что **любая $\overline{\partial}$-гармоническая форма на компактном многообразии замкнута.**

ТЕОРЕМА: Пусть M – компактное комплексное многообразие. Тогда естественное отображение из гармонических форм в когомологии $\overline{\partial}$ – изоморфизм.

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $\ker \overline{\partial}^* = (\operatorname{im} \overline{\partial})^\perp$, **естественное отображение из гармонических форм в когомологии $\overline{\partial}$ инъективно.**

Шаг 2: $\{\overline{\partial}, \{\overline{\partial}, \overline{\partial}^*\}\} = 0$ по Лемме 1. Поэтому **$\overline{\partial}$ коммутирует с $\Delta_{\overline{\partial}}$.**

Шаг 3: Рассмотрим весовое разложение $\Lambda^*(M) \otimes B \hat{=} \bigoplus_\alpha \mathcal{H}^*_\alpha(M, B)$, где α пробегает через все собственные значения Δ, а $\mathcal{H}^*_\alpha(M, B)$ весовые пространства. Для каждого α, **дифференциал $\overline{\partial}$ сохраняет собственные пространства $\Delta_{\overline{\partial}}$,** что дает комплекс

$$\mathcal{H}^0_\alpha(M, B) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{H}^1_\alpha(M, B) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{H}^2_\alpha(M, B) \xrightarrow{\overline{\partial}} \ldots$$

Теория Ходжа и когомологии (продолжение)

Шаг 4: На $\mathcal{H}^*_\alpha(M)$, имеем $\overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial} = \alpha$. Когда $\alpha \neq 0$, и η замкнута, это дает $\overline{\partial}\overline{\partial}^*(\eta) + \overline{\partial}^*\overline{\partial}(\eta) = \overline{\partial}\overline{\partial}^*\eta = \alpha\eta$, значит $\eta = \overline{\partial}\xi$, где $\xi := \alpha^{-1}\overline{\partial}^*\eta$. Значит, для ненулевых α, **комплексы** $(\mathcal{H}^*_\alpha(M,B),\overline{\partial})$ **не дают вклада в когомологии**.

Шаг 5: Мы доказали, что

$$H^i(\Lambda^*(M)\otimes B,\overline{\partial}) = \bigoplus_\alpha H^i(\mathcal{H}^*_\alpha(M),\overline{\partial}) = \mathcal{H}^i(M,B).$$

■

Когомологии векторных расслоений и двойственность Серра

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть B – голоморфное векторное расслоение на M, а $\Omega^p M$ – расслоение голоморфных $(p,0)$-форм. Тогда

$$0 \longrightarrow B \otimes_{\mathcal{O}_M} \Omega^p M \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{p,1}(M) \otimes_{\mathcal{O}_M} B \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{p,2}(M) \otimes_{\mathcal{O}_M} B \xrightarrow{\overline{\partial}} ...$$

есть тонкая резольвента $B \otimes_{\mathcal{O}_M} \Omega^p M$

СЛЕДСТВИЕ: $H^i(\Omega^p M \otimes B)$ отождествляется с ядром $\Delta_{\overline{\partial}} := \overline{\partial}^* \overline{\partial} + \overline{\partial}\overline{\partial}^*$ в $\Lambda^{p,i}(M) \otimes B$

ЗАМЕЧАНИЕ: Оператор $* : \Lambda^{p,i}(M) \otimes_{\mathcal{O}_M} B \longrightarrow \Lambda^{n-p,n-i}(M) \otimes_{\mathcal{O}_M} B^*$ переставляет $\overline{\partial}$ и $\overline{\partial}^*$, **следовательно, сохраняет** $\ker \Delta_{\overline{\partial}}$**.**

СЛЕДСТВИЕ: (двойственность Серра) Пусть M – n-мерное, компактное, кэлерово, а B – эрмитово расслоение. Тогда **умножение**

$$H^i(\Omega^p M \otimes B) \times H^{n-i}(\Omega^{n-p} M \otimes B^*) \longrightarrow H^n(\Omega^n M) = \mathbb{C}$$

задает невырожденное спаривание.

СЛЕДСТВИЕ: (двойственность Серра для $p = n$)

$$H^i(B) \cong H^{n-i}(B^* \otimes K)^*,$$

где $K = \Omega^n M$ – каноническое расслоение.

Лапласианы и кривизна

ЗАМЕЧАНИЕ: Кривизна связности Черна: $\Theta_B = \{\partial, \overline{\partial}\}$

СЛЕДСТВИЕ: Из супер-тождества Якоби следует

$$[\Lambda, \Theta_B] = [\Lambda, \{\partial, \overline{\partial}\}] = \{[\Lambda, \partial], \overline{\partial}\} + \{\partial, [\Lambda, \overline{\partial}]\} \\ = \sqrt{-1}\,\{\overline{\partial}^*, \overline{\partial}\} - \sqrt{-1}\,\{\partial^*, \partial\} = \sqrt{-1}\,\Delta_{\overline{\partial}} - \sqrt{-1}\,\Delta_{\partial}.$$

Это дает $\Delta_{\overline{\partial}} = \Delta_\partial - H_B$, где $H_B := \sqrt{-1}\,[\Lambda, \Theta_B]$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Операторы $\Delta_{\overline{\partial}}$ и Δ_∂ **положительные**, то есть удовлетворяют $(\Delta_{\overline{\partial}} x, x) \geqslant 0$ и $(\Delta_\partial x, x) \geqslant 0$.

Если $(H_B x, x) < 0$, то $(\Delta_{\overline{\partial}} x, x) > 0$, значит, $\Delta_{\overline{\partial}}$ не может иметь ядра.

Положительные линейные расслоения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Голоморфное линейное расслоение называется **положительным**, если его первый класс Черна когомологичен кэлеровой форме.

Теорема 1: (теорема Кодаиры-Накано) Пусть L – положительное линейное расслоение на компактном кэлеровом многообразии. **Тогда для любого расслоения B найдется $N > 0$ такое, что $H^i(B \otimes L^N) = 0$ для любого $i > 0$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выводится из Теоремы 2 ниже.

Теорема 2: Пусть B – голоморфное эрмитово расслоение на n-мерном кэлеровом многообразии, Θ_B – кривизна связности Черна, L_{Θ_B} – оператор умножения на Θ_B. Предположим, что самосопряженный оператор $H_B := -\sqrt{-1}\,[L_{\Theta_B}, \Lambda]$ удовлетворяет $(H_B(x), x) < 0$ для любой ненулевой k-формы x, $k < n$. **Тогда $H^p(B \otimes \Omega^q M) = 0$ для любых $p + q < n$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $\Delta_{\bar\partial} = \Delta_\partial - H_B$, что дает $(\Delta_{\bar\partial} x, x) = (\Delta_\partial x, x) - (H_B x, x) > 0$. ■

Отрицательные расслоения и когомологии

ЗАМЕЧАНИЕ: Если E, F векторные расслоения, то $\Theta_{E\otimes F} = \Theta_E + \Theta_F$. Если L линейное расслоение, то $\Theta_{L^*} = -\Theta_L$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если L^* положительно, то расслоение L называется **отрицательным.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Если L есть отрицательное расслоение на (M, ω), причем $-\sqrt{-1}\,\omega$ есть кривизна L^*, то $H_L := -\sqrt{-1}\,[L_{\Theta_L}, \Lambda] = -H$. **На p-формах это умножение на $p-n$. Поэтому L удовлетворяет условиям теоремы 2. Значит, $H^p(L\otimes\Omega^q M) = 0$ для любых $p+q<n$.**

Теорема Кодаиры-Накано: доказательство

ЗАМЕЧАНИЕ: Оператор $H_{E\otimes F}$ выражается как $H_{E\otimes F} = H_E + H_F$. Поэтому $H_{B\otimes L^N} = H_B - NH$. Для $N > \alpha$, где α есть самое большое собственное значение H_B, имеем

$$(H_{B\otimes L^N}x, x) = (H_B x, x) - N(n-k)|x|^2 < 0.$$

Теорема 2 дает $H^p(L^N \otimes B \otimes \Omega^q M) = 0$ для любых $p + q < n$.

СЛЕДСТВИЕ: Пусть L – отрицательное расслоение. Тогда **для каждого B надется N такой, что $H^i(L^{-N} \otimes B) = 0$ для $i > 0$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Применяем предыдущее замечание к $B^* \otimes K$ и пользуемся двойственностью Серра

$$0 = H^{n-i}(L^N \otimes B^* \otimes K) = H^i(B \otimes L^{-N})^*.$$

■

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы доказали, что теорема 1 следует из теоремы 2.