Комплексная алгебраическая геометрия,

лекция 8: лемма Пуанкаре-Дольбо-Гротендика

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

4 апреля 2014

Обобщенные функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Рассмотрим векторное пространство, снабженное набором норм (или полунорм) $|\cdot|_i$, $i = 0, 1, 2, ...$ и топологией, которая задана метрикой вида

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \min(|x - y|_i, 1).$$

Такое пространство называется **пространством Фреше**, если эта метрика полна.

ЗАМЕЧАНИЕ: Базой топологии Фреше будут пересечения ε-шаров вида $\bigcup_{i=0}^{\infty} B_x(\varepsilon, |\cdot|_i)$, во всех нормах $|\cdot|_i$. Последовательность сходится этой топологии $\Leftrightarrow$ она сходится в любой из норм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M — риманово многообразие, а $\nabla^i : C^\infty(M) \longrightarrow \Lambda^1(M)^{\otimes i}$ – i-я степень связности. Топология C^k на пространстве $C^\infty(M)_c$ функций с компактным носителем задается нормой

$$|\varphi|_{C^k} := \sup_M \sum_{i=0}^{k} |\nabla^i \varphi|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – гладкое многообразие. **Пространство тест-функций с носителем на компакте $K \subset M$** – пространство гладких функций с компактным носителем в K, с метрикой вида

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \min(|x - y|_{C^i}, 1).$$

Обобщенные функции (2)

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что **пространство тест-функций с носителем на компакте K есть пространство Фреше.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M есть объединение вложенных компактов $K_0 \subset K_1 \subset ....$ Рассмотрим **пространство тест-функций** $C_c^\infty(M) := \bigcup C^\infty(M)_{K_i}$, где $C^\infty(M)_{K_i}$ – тест-функции с носителем в K_i. Топология на $C_c^\infty(M)$ определяется как самая слабая топология, для которой все вложения $C^\infty(M)_{K_i} \hookrightarrow C_c^\infty(M)$ непрерывны **("топология прямого предела").**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Обобщенная функция** (распределение) это функционал на пространстве тест-функций, непрерывный в одной из топологий C^i на всех пространствах $C^\infty(M)_{K_i}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Это то же самое, что непрерывность функционала в топологии, определенной выше.

ПРИМЕР: **Дельта-функция** δ_t – функционал, ставящий φ в соответствие $\varphi(t)$, где $t \in M$ – точка. **Дельта-функция непрерывна в топологии C^0, ее производная непрерывна в C^1, и так далее.**

Потоки на многообразиях

ЗАМЕЧАНИЕ: **C^i-топологии** определяются на пространстве сечений любого расслоения, той же формулой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство тест-форм типа (p,q) на комплексном многообразии с носителем в компакте K** – это пространство $\Lambda^{p,q}(M)_K$ (p,q)-форм с носителем в K, снабженное топологией Фреше как на тест-функциях, где нормы $|\cdot|_i$ равны C^i. Пространство тест-форм на M получено объединением всех $\Lambda^{p,q}(M)_K$ по всем компактам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **(p,q)-поток** на комплексном n-мерном многообразии есть функционал на пространстве $\Lambda_c^{n-p,n-q}(M)$ $(n-p,n-q)$-форм с компактным носителем, непрерывный в одной из C^i-топологий.

ЗАМЕЧАНИЕ: Потоки это (p,q)-формы с коэффициентами в обобщенных функциях.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Гладкая (p,q)-форма ψ определяет (p,q)-поток:** для любой тест-формы $\alpha \in \Lambda_c^{n-p,n-q}(M)$, рассмотрим функционал $\alpha \longrightarrow \int_M \psi\wedge\alpha$. Это задает вложение $\Lambda^{p,q}(M) \hookrightarrow \mathcal{D}^{p,q}(M)$ из форм в потоки.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Потоки это пополнение $\Lambda^{p,q}(M)$ в топологии, двойственной топологии на тест-формах.**

Когомологии потоков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Дифференцирование вдоль векторного поля непрерывно в топологии потоков, значит, **на пространстве потоков определен дифференциал де Рама,** продолженный по непрерывности из пространства форм, а также дифференциалы Дольбо ∂ и $\overline{\partial}$

ЗАМЕЧАНИЕ: Дифференциал де Рама на потоках можно определить формулой $\langle d\alpha, \tau\rangle := -(-1)\tilde{\alpha}\langle \alpha, d\tau\rangle$, где α – поток, а τ – тест-форма.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите лемму Пуанкаре для потоков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – собственный морфизм комплексных многообразий, $\dim_{\mathbb{C}} X = \dim_{\mathbb{C}} Y + k$ а α – поток на X. Определим **прямой образ** $f_*\alpha$ формулой $\langle f_*\alpha, \tau\rangle := \langle \alpha, f^*\tau\rangle$ Легко видеть, что $f_*\alpha$ **имеет размерность $(p-k, q-k)$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: $df_*\alpha = f_*d\alpha$, $\partial f_*\alpha = f_*\partial\alpha$, и так далее.

ЗАМЕЧАНИЕ: У потоков **не определен** обратный образ, зато определен прямой. У форм нет прямого образа, зато есть обратный.

Формула Пуанкаре-Лелонга

УТВЕРЖДЕНИЕ: (Формула Пуанкаре-Лелонга) Рассмотрим поток на $\mathbb{C}$, заданный формулой $\frac{1}{\pi z}dz$. **Тогда $d\left(\frac{1}{\pi z}dz\right) = \delta_0 \operatorname{Vol}$,** где δ_0 есть δ-функция в 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: **Формула Коши:** для любой функции f на диске D, и $w \in D$, имеем

$$f(w) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-w} dz - \frac{1}{\pi} \int_D \frac{\overline{\partial} f}{z-w} \wedge dz$$

применив это к тест-функции f с компактным носителем внутри D, получим

$$f(w) = -\left\langle \frac{1}{\pi z} dz, \overline{\partial} f \right\rangle = \left\langle \overline{\partial}\left(\frac{1}{\pi z}\right) dz, f \right\rangle = \left\langle d\left(\frac{dz}{\pi z}\right), f \right\rangle.$$

(последнее равенство выполнено потому, что $d\eta = \overline{\partial}\eta$ для любой (1,0)-формы на диске). ■

Лемма Пуанкаре-Дольбо-Гротендика (размерность 1)

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ – проекции, а ξ – (1,0)-поток на $\mathbb{C}^2$, заданный формулой $\frac{1}{\pi(z-w)}dw$, где w, z – координаты на $\mathbb{C}^2$. Рассмотрим **свертку с потоком** ξ, заданную формулой $P_\xi(\tau) := \pi_{2*}(\pi_1^*\tau \wedge \xi)$. Тогда $\overline{\partial} P_\xi(\alpha) = \alpha$, для любой $(0,1)$-формы α с компактным носителем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $\overline{\partial} P_\xi(\alpha) = \pi_{2*}(\pi_1^*\alpha \wedge \overline{\partial}\xi) = \pi_{2*}(\pi_1^*\alpha \wedge \delta_\triangle) = \alpha$, где $\delta_\triangle$ есть дельта-функция диагонали $\triangle$, определенная формулой $\langle \kappa, \delta_\triangle \rangle := \int_\triangle \kappa$. ■

СЛЕДСТВИЕ: **Для любой (0,1)-формы α с компактным носителем на $\mathbb{C}$, существует функция f на $\mathbb{C}$ такая, что $\overline{\partial} f = \alpha$.** Более того, f можно выбрать таким образом, что $|f(z)| < C\frac{1}{|z|}$ для какой-то константы $C > 0$, зависящей от $\int_\mathbb{C} |\alpha|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем $f = P_\xi(\alpha)$. В силу определения α понятно, что $f(z) < \operatorname{dist}(z, S)^{-1} \int_\mathbb{C} |\alpha|$, где S – носитель α. Из этого следует требуемая оценка. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Аналогично, для любой (1,1)-формы α с компактным носителем имеем $\overline{\partial}(P_\xi(\alpha)) = \alpha$, с такими же оценками на порядок роста.

Лемма Пуанкаре-Дольбо-Гротендика

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Полидиск D^n есть произведение дисков $D \subset \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА: (Лемма Пуанкаре-Дольбо-Гротендика)
Пусть $\eta \in \Lambda^{0,p}(D^n)$ – $\bar\partial$-замкнутая форма на полидиске, гладко продолжающаяся в окрестность $D^n \subset \mathbb{C}^n$, и $p > 0$. Тогда η $\bar\partial$-точна.

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы доказали $(0,1)$-формы η с компактным носителем на $\mathbb{C}$, **$\eta = \bar\partial\alpha$, где α – гладкая функция на $\mathbb{C}$** (не обязательно с компактным носителем, но убывающая как $1/|z|$).

ЗАМЕЧАНИЕ: Из этого следует **лемма Пуанкаре-Дольбо-Гротендика для $n = 1$.** Действительно, любая форма η на диске, продолжающаяся в окрестность $D \subset \mathbb{C}$, продолжается до формы на $\mathbb{C}$ с компактным носителем, значит, **лежит в образе $\bar\partial$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Воспользовавшись разложением $\Lambda^{p,q}(D^n) \cong \Lambda^{p,0}(D^n) \otimes \Lambda^{0,q}(D^n)$, каждую форму можно представить в виде суммы вида $\sum \alpha_i^{0,q} \wedge P_i^{p,0}$, где P_i – полиномы от координатных ковекторов dz_i с постоянными коэффициентами. Поскольку $\bar\partial(\alpha_i^{0,q} \wedge P_i^{p,0}) = \bar\partial(\alpha_i^{0,q}) \wedge P_i^{p,0}$, **лемму Пуанкаре-Дольбо-Гротендика достаточно доказывать для $(0,q)$-форм.**

Доказательство леммы Пуанкаре-Дольбо-Гротендика

Шаг 1: Пусть $\overline{\partial}_i: \Lambda^{0,q}(D^n) \longrightarrow \Lambda^{0,q+1}(D^n)$ есть оператор $\alpha \longrightarrow d\overline{z}_i \wedge \frac{d}{d\overline{z}_i}\alpha$, где z_i есть i-я координата на D^n. **Тогда $\overline{\partial} = \sum_i \overline{\partial}_i$.**

Шаг 2: В силу леммы Пуанкаре-Дольбо-Гротендика для $n = 1$, когомологии $\overline{\partial}_i$ равны нулю. Обозначим за γ_i соответствующий интегральный оператор P_ξ. Если $\alpha = d\overline{z}_i \wedge \beta$, то $\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\}(\alpha) = \alpha$, если в разложении α нет членов с $d\overline{z}_i$, то $\overline{\partial}_i\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\}(\alpha) = 0$. Из этого следует, что $\operatorname{im}\left[\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\} - \operatorname{Id}\right]$ **лежит в пространстве R_i форм, в разложении которых нет $d\overline{z}_i$, а все коэффициенты голоморфны по z_i.**

Шаг 3: Свойства γ_i:
1. $\operatorname{im}\left[\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\} - \operatorname{Id}\right] \subset R_i$. **2.** $\{\overline{\partial}_i, \gamma_j\} = 0$, **если** $i \neq j$. **3.** $\left[\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\}\right]\Big|_{R_i} = 0$. **4.** $\gamma_i(R_j) \subset R_j$, $\overline{\partial}_i(R_j) \subset R_j$ **для** $i \neq j$.
Свойство 1 доказано в шаге 2, 3 следует из того, что на формах α без $d\overline{z}_i$ в разложении имеем $\{\gamma_i, \overline{\partial}\}(\alpha) = \gamma_i(\overline{\partial}_i(\alpha))$. Свойства 2 и 4 следуют из явной формулы для γ_i.

Шаг 4: В силу свойств 1, 3 и 4,
$\left[\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\} - \operatorname{Id}\right](R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap ... \cap R_{i_k}) \subset R_i \cap R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap ... \cap R_{i_k}$ для $i \notin \{i_1, i_2, ..., i_k\}$, и $\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\}\Big|_{R_{i_1}\cap R_{i_2}\cap ...\cap R_{i_k}} = 0$ в противном случае.

Доказательство леммы Пуанкаре-Дольбо-Гротендика (2)

Шаг 4: $\left[\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\} - \mathrm{Id}\right](R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap ... \cap R_{i_k}) \subset R_i \cap R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap ... \cap R_{i_k}$ **для** $i \notin \{i_1, i_2, ..., i_k\}$**, и** $\{\overline{\partial}_i, \gamma_i\}\Big|_{R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap ... \cap R_{i_k}} = 0$ **в противном случае.**

Шаг 5: Пусть $\gamma := \sum_i \gamma_i$. Поскольку $\{\overline{\partial}_i, \gamma_j\} = 0$ при $i \neq j$, шаг 4 дает

$$\left[\{\overline{\partial}, \gamma\} - (n-k)\,\mathrm{Id}\right](R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap ... \cap R_{i_k}) \subset \sum_{i \neq i_1, i_2, ..., i_k} R_i \cap R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap ... \cap R_{i_k}$$

Шаг 6: Пусть W_0 есть пространство $(0,p)$-форм на D^n, допускающих продолжение в некоторую окрестность D^n, а $W_k \subset W_{k-1} \subset ...$ – подпространство, порожденное всеми $R_{i_1} \cap R_{i_2} \cap ... \cap R_{i_k}$ для $i_1 < i_2 < ... < i_k$. В силу предыдущего шага, $\left[\{\overline{\partial}, \gamma\} - (n-k)\,\mathrm{Id}\right]\Big|_{W_k} \subset W_{k+1}$.

Шаг 7: Легко видеть, что W_n состоит из голоморфных функций, которые являются $(0,p)$-формами, то есть пусто в силу $p > 0$. **Воспользовавшись индукцией, можно считать, что каждая $\overline{\partial}$-замкнутая форма в W_{k+1} $\overline{\partial}$-точна.** Пусть $\alpha \in W_k$ $\overline{\partial}$-замкнута. Тогда $(n-k)\alpha - \{\overline{\partial}, \gamma\}(\alpha) = (n-k)\alpha - \overline{\partial}\gamma(\alpha)$ лежит в W_{k+1}, то есть точна. **Получаем $(n-k)\alpha - \overline{\partial}\gamma(\alpha) = \overline{\partial}\eta$.**

■

Пучки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пучок $\mathcal{F}$ на топологическом пространстве M – это набор векторных пространств $\mathcal{F}(U)$, заданных для каждого открытого подмножества $U \subset M$, с **отображениями ограничения** $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_{U,U'}} \mathcal{F}(U')$ для каждого $U' \subset U$, и следующими свойствами

(1) **Композиция ограничений – снова ограничение:** если $U_1 \subset U_2 \subset U_3$ вложенные открытые множества, а φ_{U_1,U_2}, φ_{U_2,U_3} соответствующие отображения ограничений, то $\varphi_{U_1,U_2} \circ \varphi_{U_2,U_3} = \varphi_{U_1,U_3}$.

(2) Если $U = \bigcup U_i$, а ограничение $f \in \mathcal{F}(U)$ на все U_i равно нулю, то $f = 0$.

(3) ("склейка сечений") Пусть $\{U_i\}$ – покрытие множества $U \subset M$, а $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ набор сечений, заданных для каждого элемента покрытия, и удовлетворяющих условию $f_i\big|_{U_i \cap U_j} = f_j\big|_{U_i \cap U_j}$, для любой пары элементов покрытия. **Тогда существует $f \in \mathcal{F}(U)$ такой, что ограничения f на U_i дает f_i.**

Пространство $\mathcal{F}(U)$ называется **пространство сечений пучка $\mathcal{F}$ над U**, оно также обозначается $\mathcal{F}|_U$.

Паракомпактные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Покрытие** топологического пространства M есть набор открытых множеств $\{U_i\}$ такой, что $\bigcup U_i = M$. **Измельчение** покрытия $\{U_i\}$ есть покрытие $\{V_i\}$, такое, что каждый V_i содержится в каком-то из U_i.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Топологическое пространство M называется **паракомпактным**, если любое покрытие M допускает локально конечное измельчение.

ЗАМЕЧАНИЕ: Любое паракомпактное многообразие M обладает следующим свойством. Каждое покрытие M допускает пару конечных измельчений $\{U_i\}$, и $\{V_i\}$ пронумерованных тем же набором индексов, причем все замыкания $\overline{U}_i$ компактны и содержатся в V_i.

ЗАМЕЧАНИЕ: **В дальнейшем все многообразия предполагаются паракомпактными.**

Носитель сечения пучка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Носитель** сечения f пучка есть дополнение к объединению всех открытых множеств $U \subset M$ таких, что $f|_U = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $f \in \mathcal{F}|_U$ – сечение пучка на многообразии $M \ni U$, причем носитель сечения f замкнут в M. **Тогда f принадлежит образу отображения ограничения $\Gamma_M(\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma_U(\mathcal{F})$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим покрытие $\{U_1 := U, U_2 := M \backslash K\}$, и пусть $f_1 \in \Gamma_{U_1}(\mathcal{F}) = f$, а $f_2 \in \Gamma_{U_2}(\mathcal{F}) = 0$. Тогда $f_i\Big|_{U_1 \cap U_2} = 0$, склеив их, обретем искомое. ■

Разбиение единицы на пучке

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\{U_i\}$, $\{V_i\}$ – пара локально конечных покрытий M, пронумерованных тем же набором индексов, причем для любого i замыкание V_i компактно, а замыкание U_i компактно и содержится в V_i. Обозначим за $F^c|_U$ группу сечений с компактным носителем над U. **Разбиение единицы** для пучка F есть такой набор гомоморфизмов $\psi_i: F|_{V\,i} \longrightarrow F^c|_{V\,i}$, и $\varphi_i: F|_{V\,i} \longrightarrow F^c|_{V\,i}$, что

(i) $\sum_i \psi_i(f) = f$ **для любого сечения** f

(ii) ψ_i **обратимо на** U_i**:** $\varphi_i(\psi_i(f))\Big|_{U_i} = f\Big|_{U_i}$

Пучок называется **тонким**, если он допускает разбиение единицы для любой пары таких покрытий.

ЗАМЕЧАНИЕ: Все пучки модулей над $C^\infty(M)$ и $C^i(M)$ – тонкие.

Ростки пучка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Росток** пучка $\mathcal{F}$ в замкнутом множестве $Z \subset M$ есть класс эквивалентности сечений $\mathcal{F}$ в окрестностях Z, по следующему отношению эквивалентности. Сечения $f \in \mathcal{F}|_U$ и $f' \in \mathcal{F}|_{U'}$ эквивалентны, если $f|_U = f'|_U$ для окрестности Z, $U \subset U_1 \cap U_2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Если $\mathcal{F}$ – тонкий пучок, а $x \subset M$ – точка то **естественное отображение $\Gamma_M(\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F})$ в соответствующее пространство ростков сюрьективно.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: **:** Возьмем росток f, определенный в $U \ni x$, ограничим его на $V_i \supset U_i \ni x$ в покрытии, связанном с разбиением единицы, тогда $\varphi_i(\psi_i(f))|_{U\,i} = f|_{U\,i}$. Значит, $f' := \varphi_i(\psi_i(f))$ **имеет тот же росток.** Это сечение продолжается до сечения $\Gamma_M(\mathcal{F})$, потому что у него компактный носитель. ■

Ацикличные пучки

ЗАМЕЧАНИЕ: $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ **является точной последовательностью пучков $\Leftrightarrow$ соответствующие последовательности ростков точные для каждого $x \in M$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Функтор Φ из категории пучков в векторные пространства называется **точным слева** если любая точная последовательность пучков $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ переводится в точную слева последовательность $0 \longrightarrow \Phi(A) \longrightarrow \Phi(B) \longrightarrow \Phi(C)$.

ПРИМЕР: Функтор глобальных сечений $\mathcal{F} \longrightarrow \Gamma_M(\mathcal{F})$ точен слева.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пучок A называется **ацикличным** , если для любого $U \subset M$ и точной последовательности пучков $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$, последовательность $0 \longrightarrow \Gamma_U(A) \longrightarrow \Gamma_U(B) \longrightarrow \Gamma_U(C) \longrightarrow 0$ точна.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Любой тонкий пучок ацикличен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $0 \longrightarrow F \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow ...$ – точная последовательность пучков, которые ацикличны, начиная с F_1. Такая последовательность называется **ацикличной резольвентой** F.

Когомологии пучков

ЗАМЕЧАНИЕ: В силу леммы Пуанкаре-Дольбо-Гротендика, $\Omega^p(M) \hookrightarrow \Lambda^{p,0}(M) \xrightarrow{\bar\partial} \Lambda^{p,1}(M) \xrightarrow{\bar\partial} \Lambda^{p,2}(M) \xrightarrow{\bar\partial} ...$ **– ацикличная резольвента пучка голоморфных дифференциальных форм.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $F \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_2 \longrightarrow ...$ – ацикличная резольвента. **Группа когомологий** $H^i(F)$ определяется как i-я группа когомологий соответствующего комплекса глобальных сечений,

$$\Gamma_M(F) \longrightarrow \Gamma_M(F_1) \longrightarrow \Gamma_M(F_2) \longrightarrow ...$$

УТВЕРЖДЕНИЕ: (Свойства когомологий):

1. Группы $H^i(F)$ **не зависят от выбора ацикличной резольвенты.**

2. $H^i(F) = 0$ **для всех** $i > 0$ **тогда и только тогда, когда** F **ацикличен.**

3. Для любой точной последовательности пучков $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ имеет место **длинная точная последовательность**

$$0 \longrightarrow H^0(A) \longrightarrow H^0(B) \longrightarrow H^0(C) \longrightarrow H^1(A) \longrightarrow H^1(B) \longrightarrow H^1(C) \longrightarrow ...$$