Комплексная алгебраическая геометрия,

лекция 7: суперсимметрия и ее приложения

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

20 марта 2014

Лекции 28-го марта не будет!

Контрольной 28-го тоже не будет (из-за госов по английскому)!

Контрольная будет 24-го в 15:30 в 1001!

Градуированные векторные пространства и алгебры (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Градуированное векторное пространство** есть пространство $V^* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V^i$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Еслу V^* градуировано, пространство эндоморфизмов $\operatorname{End}(V^*) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{End}^i(V^*)$ тоже градуировано,

$$\operatorname{End}^i(V^*) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}(V^j, V^{i+j}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Градуированная алгебра** (или "градуированная ассоциативная алгебра") есть алгебра $A^* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ с умножением, которое совместимо с градуировкой: $A^i \cdot A^j \subset A^{i+j}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Билинейное отображение градуированных пространств, которое удовлетворяет $A^i \cdot B^j \subset C^{i+j}$, называется **градуированным**, или **совместимым с градуировкой**.

Суперкоммутатор (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Оператор на градуированном пространстве называется **четным** (**нечетным**), если он сдвигает градуировку на четное (нечетное) число. **Четность** $\tilde{a}$ оператора a есть 0, если он четный, 1 если нечетный. Мы говорим, что оператор **чистый** если он четный или нечетный.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Суперкоммутатор** чистых элементов определяется формулой $\{a, b\} = ab - (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}} ba$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Градуированная ассоциативная алгебра A^* называется **суперкоммутативной** если в A^* суперкоммутатор равен нулю.

ПРИМЕР: Алгебра Грассмана $\Lambda^* V$ суперкоммутативна.

Супералгебры Ли (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Супералгебра Ли** есть градуированное векторное пространство $\mathfrak{g}^*$ снабженное билинейным градуированным произведением $\{\cdot,\cdot\}: \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, которое супер-антикоммутативно:

$$\{a,b\} = -(-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}\{b,a\}$$

и удовлетворяет **супер-тождеству Якоби**

$$\{c,\{a,b\}\} = \{\{c,a\},b\} + (-1)^{\tilde{a}\tilde{c}}\{a,\{c,b\}\}$$

ПРИМЕР: Рассмотрим алгебру $\operatorname{End}^*(V^*)$ всех эндоморфизмов градуированного векторного пространства, с суперкоммутатором, определенным выше. Тогда $\operatorname{End}^*(V^*), \{\cdot,\cdot\}$ **есть супер-алгебра Ли**.

Лемма 1: Пусть d есть нечетный элемент супералгебры Ли над полем характеристики $\neq 2$, удовлетворяющий $\{d,d\} = 0$. **Тогда** $\{\{L,d\},d\} = 0$ для любого L.

Доказательство:

$$0 = \{L,\{d,d\}\} = \{\{L,d\},d\} + (-1)^{\tilde{L}}\{d,\{L,d\}\} = 2\{\{L,d\},d\}.$$

Оператор Ходжа $*$ (повторение)

Пусть V – вещественное векторное пространство. **Метрика на V индуцирует метрику на его тензорных пространствах**, $g(x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_k, x'_1 \otimes x'_2 \otimes ... \otimes x'_k) = g(x_1, x'_1)g(x_2, x'_2)...g(x_k, x'_k)$

Это задает **невырожденное, положительно определенное скалярное произведение на дифференциальных формах** на римановом многообразии: $g(\alpha, \beta) := \int_M g(\alpha, \beta) \operatorname{Vol}_M$

Другая невырожденная форма задается формулой $\alpha, \beta \longrightarrow \int_M \alpha \wedge \beta$ **(спаривание Пуанкаре).**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – риманово n-мерное многообразие. Определим **оператор Ходжа** $* : \Lambda^k M \longrightarrow \Lambda^{n-k} M$ формулой $g(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge * \beta.$

ЗАМЕЧАНИЕ: Оператор Ходжа всегда существует. В ортонормальном базисе $\xi_1, ..., \xi_n \in \Lambda^1 M$, его можно задать на мономах

$$*(\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge ... \wedge \xi_{i_k}) = (-1)^s \xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge ... \wedge \xi_{j_{n-k}},$$

где $\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, ..., \xi_{j_{n-k}}$ – дополнительный набор ковекторов, а s – сигнатура перестановки $(i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_{n-k})$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $*^2\big|_{\Lambda^k(M)} = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{Id}_{\Lambda^k(M)}$

Теория Ходжа (повторение)

УТВЕРЖДЕНИЕ: На компактном римановом многообразии, имеем $d^*\Big|_{\Lambda^k M} = (-1)^{nk} * d*$, где d^* – **сопряженный оператор** к d, $(d\alpha, \gamma) = (\alpha, d^*\gamma)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Антикоммутатор $\Delta := \{d, d^*\} = dd^* + d^*d$ называется **оператор Лапласа** на M. Это самосопряженный, положительно определенный оператор: $(\Delta x, x) = (dx, dx) + (d^*x, d^*x)$.

Основная теорема теории Ходжа: Существует **базис в гильбертовом пространстве** $L^2(\Lambda^*(M))$, состоящий из собственных векторов Δ, и каждое собственное пространство конечномерно.

ТЕОРЕМА: **(“Эллиптическая регулярность”)** Пусть $\alpha \in L^2(\Lambda^k(M))$ – собственный вектор Δ. **Тогда α – гладкая k-форма.**

Теория Ходжа и когомологии (повторение)

Определение: Форма α называется **гармонической**, если $\Delta(\alpha) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любой гармонической формы α, $0 = (\Delta\alpha, \alpha) = (d\alpha, d\alpha) + (d^*\alpha, d^*\alpha)$, значит, $\alpha \in \ker d \cap \ker d^*$. Получаем, что **любая гармоническая форма на компактном многообразии замкнута.**

ТЕОРЕМА: Пусть M – компактное, риманово. Тогда естественное отображение $\mathcal{H}^i(M) \longrightarrow H^i(M)$ из гармонических форм в когомологии – изоморфизм.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из этой теоремы сразу следует **двойственность Пуанкаре между $H^i(M)$ и $H^{n-i}(M)$:** $\int_M \eta\wedge *\eta \neq 0$ для любого η, что дает **невырожденность спаривания $H^i(M) \otimes H^{n-i}(M) \longrightarrow H^n(M) = H^0(M) = \mathbb{R}$.** Здесь используется то, что для гармоничного η, форма $*\eta$ тоже гармонична, следовательно, замкнута.

Координатные операторы (повторение)

Пусть V – евклидово пространство, v_i – его базис, $e_{v_i}: \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^{k+1} V$ оператор умножения на v_i, $e_{v_i}(\eta) = e_i \wedge \eta$. а $i_{v_i}: \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^{k-1} V$ сопряженный оператор, $i_{v_i} = * e_{v_i} *$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Операторы e_{v_i}, i_{v_i}, Id задают базис в **нечетной супералгебре Гейзенберга $\mathfrak{H}$**, где единственный нетривиальный суперкоммутатор задается $\{e_{v_i}, i_{v_j}\} = \delta_{i,j}\,\mathrm{Id}$.

Пусть теперь V, I, g – эрмитово n-мерное векторное пространство, а $\omega = \sum_{i=1}^n v_{2i-1} \wedge v_{2i}$ – эрмитова форма. Определим **операторы Ходжа** $L(\alpha) = \omega \wedge \alpha$, и $\Lambda := L^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из соотношений в $\mathfrak{H}$, немедленно следует, что $H := [L, \Lambda] = \left[\sum e_{v_{2i-1}} e_{v_{2i}}, \sum i_{v_{2i-1}} i_{v_{2i}}\right] = \sum_{i=1}^{2n} e_{v_i} i_{v_i} - \sum_{i=1}^{2n} i_{v_i} e_{v_i}$, **скалярный оператор, действующий на k-формах умножением на $n-k$.**

СЛЕДСТВИЕ: Операторы L, Λ, H образуют алгебру Ли, изоморфную $\mathfrak{sl}(2)$, с соотношениями $[L, \Lambda] = H, \quad [H, L] = 2L, \quad [H, \Lambda] = -2\Lambda$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: L, Λ, H называется **$\mathfrak{sl}(2)$-тройкой Лефшеца**.

Суперсимметрия в кэлеровой геометрии

Пусть (M, I, ω) – кэлерово многообразие. Рассмотрим операторы, действующие на $\Lambda^*(M)$:

1. d, $d^* := - * d *$, $\Delta := dd^* + d^*d$
2. **Оператор Ходжа** $L(\alpha) := \omega \wedge \alpha$ и его сопряженный $\Lambda(\alpha) := *L * \alpha$.
3. **Оператор Вейля:** $\mathcal{W}\Big|_{\Lambda^{p,q}(M)} = \sqrt{-1}\,(p-q)$.

ТЕОРЕМА: ("Кэлеров пакет")
Эти операторы порождают 9-мерную супералгебру Ли $\mathfrak{a}$, действующую на $\Lambda^*(M)$. Нечетные операторы $d, d^c, d^*, (d^c)^*$ порождают **нечетную алгебру Гейзенберга**, у которой есть ровно два нетривиальных коммутатора: $\{d, d^*\} = \{d^c, (d^c)^*\} = \Delta$ (оператор Лапласа), причем Δ лежит в центре $\mathfrak{a}$. Все нетривиальные коммутаторы четных операторов получаются из соотношений в тройке Лефшеца, а ненулевые коммутаторы четных и нечетных устроены так: $[W, d] = d^c$, $[\Lambda, d] = -d^c$, плюс еще 6 соотношений, которые получаются из этих подкруткой на I и на $*$.

СЛЕДСТВИЕ: Лапласиан Δ лежит в центре $\mathfrak{a}$, значит, **$\mathfrak{a}$ действует на когомологиях M.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Это удобный способ задавать **"соотношения Кэлера"** между всеми этими операторами.

Суперсимметрия в кэлеровой геометрии: соотношения Кодаиры

ТЕОРЕМА: (Соотношения Кэлера, они же соотношения Кодаиры).
На кэлеровом многообразии, имеем $[\Lambda, d] = -(d^c)^*, [\Lambda, d^c] = d^*, [L, d^*] = d^c, [L, (d^c)^*] = -d.$

Доказательство. Шаг 1: Достаточно доказать, например, что $[L, d^*] = d^c$. Пусть $\mathfrak{E} : \Lambda^i M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^{i+1}(M)$ умножение, $\mathfrak{I} : \Lambda^i M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^{i-1}(M)$ подстановка двойственного векторного поля. **Тогда** $d(\eta) = \mathfrak{E}(\nabla(\eta))$**, а** $d^*(\eta) = \mathfrak{I}(\nabla(\eta))$**.**

Шаг 2: Поскольку ∇ коммутирует с L, имеем $[L, d^*] = [L, \mathfrak{I}] \circ \nabla$, где $L : \Lambda^i M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^{i+2} M \otimes \Lambda^1 M$ действует по первому сомножителю. Выписав ортонормированный базис в Λ^1, получим $L = \sum e_{v_{2i-1}} e_{v_{2i}}$, а $[e_x, \mathfrak{I}] = 1$ в силу соотношений супералгебры Гейзенберга, порожденной e_i, i_k. Это дает $[L, \mathfrak{I}](v_{2i-1} \otimes \eta) = -e_{v_{2i}}$ и $[L, \mathfrak{I}](v_{2i} \otimes \eta) = e_{v_{2i-1}}$, **то есть** $[L, \mathfrak{I}](a \otimes \eta) = \mathfrak{E}(I(a) \otimes \eta)$**.**

Шаг 3: С другой стороны, $d(\eta) = \mathfrak{E}^c(\nabla(\eta))$, где $\mathfrak{E}^c(a \otimes \eta) = \mathfrak{E}(I(a) \otimes \eta)$. Подставляя сюда заключения шага 1 и шага 2, получаем $[L, d^*] = d^c$. ■

Оператор Лапласа

Отметим, что $\{d, d^c\} = 0$ (это равносильно интегрируемости комплексной структуры). Применяя $[\Lambda, *]$ и пользуясь супер-тождеством Якоби, получаем

$$0 = [\Lambda, \{d, d^c\}] = -\{(d^c)^*, d^c\} + \{d, d^*\}$$

то есть операторы Лапласа, связанные с d, d^c, равны. Все остальные коммутационные соотношения между $d, d^c, d^*, (d^c)^*$ зануляются в силу Леммы 1: $\{d^c, d^*\} = \{d^c, [d^c, \Lambda]\} = 0$ и так далее. Наконец, применяя L или Λ к оператору Лапласа, получаем $\{d, d^c\}$ либо $\{d^*, (d^c)^*\}$ в силу супер-тождества Якоби. **Значит, оператор Лапласа лежит в центре $\mathfrak{a}$.**

Ромб Ходжа

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^{n,n} & & \\
 & H^{n,n-1} & & H^{n-1,n} & \\
H^{n,n-2} & & H^{n-1,n-1} & & H^{n-2,n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
H^{2,0} & & H^{1,1} & & H^{0,2} \\
 & H^{1,0} & & H^{0,1} & \\
 & & H^{0,0} & &
\end{array}$$

Лекции 28-го марта не будет!

Контрольной 28-го тоже не будет (из-за госов по английскому)!

Контрольная будет 24-го в 15:30 в 1001!

dd^c-лемма

ТЕОРЕМА: Пусть η - форма на компактном кэлеровом многообразии, которая удовлетворяет какому-то из условий
1. η – точная (p,q)-форма. 2. η – d^c-точная, d-замкнутая.
3. η – ∂-точная, $\overline{\partial}$-замкнутая.
Тогда $\eta \in \operatorname{im} dd^c = \operatorname{im} \partial\overline{\partial}$**.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Отметим сразу, что во всех трех случаях η **замкнута и ортогональна ядру Лапласа, значит, ее класс когомологий равен нулю.**

Поскольку η точна, она лежит в образе Δ. Оператор $G_\Delta := \Delta^{-1}$ определен на образе Δ (который замкнут) и коммутирует с d, d^c. Значит, $\eta' := G_\Delta(\eta)$ тоже точно. $\Delta = [\Lambda, dd^c]$ дает

$$\eta = \Delta(\eta') = [\Lambda, dd^c](\eta') = dd^c \Lambda \eta'.$$

■

ЗАМЕЧАНИЕ:

$$\Delta G_\Delta(\eta) = dd^* + d^* d G_\Delta(\eta) = d^* G_\Delta(d\eta) + dd^* G_\Delta(\eta) = \eta$$

для любой точной формы η. Значит, $d^* G_\Delta$ **обращает d на точных формах.**

Операции Масси

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $a, b, c \in \Lambda^*(M)$ замкнутые формы, классы когомологий которых удовлетворяют $[a][b] = [b][c] = 0$, а $\alpha, \gamma \in \Lambda^*(M)$ такие формы, что $d(\alpha) = a \wedge b$, $d(\gamma) = b \wedge c$. **Тогда $\alpha \wedge c - a \wedge \gamma$ – замкнутая форма, и ее класс когомологий определен однозначно** по модулю $\operatorname{im} L_{[a]} + \operatorname{im} L_{[c]}$ (по модулю умножения на классы $[a]$, $[c]$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Класс когомологий $\alpha \wedge c - a \wedge \gamma$ называется **произведением Масси** a, b, c.

УТВЕРЖДЕНИЕ: **На кэлеровом многообразии, произведения Масси равны нулю.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть a, b, c – гармонические p,q-формы, тогда ab и bc – dd^c-точные p,q-формы, значит, $\alpha := d^* G_\Delta(ab)$ и $\gamma := d^* G_\Delta(bc)$ d^c-точные. Поэтому $\mu := \alpha \wedge c - a \wedge \gamma$ – d^c-точная, d-замкнутая форма. В силу dd^c-леммы, $I(\mu)$ dd^c-точна, значит μ тоже dd^c-точна. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: $I^{-1} dd^c I = -dd^c$.

Теорема Хартогса

ТЕОРЕМА: Пусть f – голоморфная функция на $\mathbb{C}^n \backslash K$, где $K \subset \mathbb{C}^n$ – компакт, а $n > 1$. **Тогда f продолжается до голоморфной функции на $\mathbb{C}^n$.**

Доказательство. Шаг 1: Продолжим f до гладкой функции $\tilde{f}$, голоморфной вне компакта $K' \subset \mathbb{C}^n$. **Тогда $\alpha := \overline{\partial}\tilde{f}$ – (0,1)-форма с компактным носителем.**

Шаг 2: Вложив $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}P^n$, представим α как (0,1)-форму с компактным носителем на $\mathbb{C}P^n$. Поскольку $H^1(\mathbb{C}P^n) = 0$, получаем $\operatorname{im}\overline{\partial} = \ker\overline{\partial}$, это дает $\alpha = \overline{\partial}\varphi$, где φ – ограниченная функция на $\mathbb{C}^n$.

Шаг 3: φ голоморфна и ограниченна на любой прямой, не пересекающей K', значит, **φ постоянна на каждой комплексной прямой, не пересекающей K'.**

Шаг 4: Поэтому $\varphi = const$ вне выпуклой оболочки $U(1) \cdot K'$. Вычтем константу, получим, что **φ – функция с компактным носителем.**

Шаг 5: $\overline{\partial}(\tilde{f} - \varphi) = \alpha - \alpha = 0$, **значит, $\tilde{f} - \varphi$ – голоморфная функция.** ∎

Обобщенные функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Рассмотрим векторное пространство, снабженное набором норм $|\cdot|_i$, $i = 0, 1, 2, ...$ и топологией, которая задана метрикой вида

$$d(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \min(|x-y|_i, 1).$$

Такое пространство называется **пространством Фреше**, если эта метрика полна.

ЗАМЕЧАНИЕ: Базой топологии Фреше будут бесконечные пересечения ε-шаров вида $\bigcup_{i=0}^{\infty} B_x(\varepsilon, |\cdot|_i)$, во всех метриках $|\cdot|_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M — риманово многообразие, а

$$\nabla^i : C^\infty(M) \longrightarrow \Lambda^1(M)^{\otimes i}$$

– i-я степень связности. Топология C^k на пространстве $C^\infty(M)_c$ функций с компактным носителем задается нормой

$$|\varphi|_{C^k} := \sup_M \sum_{i=0}^{k} |\nabla^i \varphi|.$$

Обобщенные функции (2)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство тест-функций** – пространство функций с компактным носителем, с метрикой вида

$$d(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \min(|x-y|_{C^i}, 1).$$

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что это пространство Фреше.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Обобщенная функция** (распределение) это функционал на пространстве тест-функций, непрерывный в одной из топологий C^i.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Это то же самое, что непрерывность функционала в топологии Фреше.**

ПРИМЕР: **Дельта-функция** δ_t – функционал, ставящий φ в соответствие $\varphi(t)$, где $t \in M$ – точка. **Дельта-функция непрерывна в топологии C^0, ее производная непрерывна в C^1, и так далее.**

Потоки на многообразиях

ЗАМЕЧАНИЕ: **C^i-топологии** определяются на пространстве сечений любого расслоения, той же формулой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Пространство тест-форм типа (p,q)** на комплексном многообразии – это пространство (p,q)-форм с компактным носителем, снабженное структурой пространства Фреше, где нормы $|\cdot|_i$ равны C^i.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **(p,q)-поток** на комплексном n-мерном многообразии есть функционал на пространстве $\Lambda_c^{n-p,n-q}(M)$ $(n-p,n-q)$-форм с компактным носителем, непрерывный в одной из C^i-топологий.

ЗАМЕЧАНИЕ: Потоки это (p,q)-формы с коэффициентами в обобщенных функциях.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Гладкая (p,q)-форму ψ определяет (p,q)-поток:** для любой тест-формы $\alpha \in \Lambda_c^{n-p,n-q}(M)$, рассмотрим функционал $\alpha \longrightarrow \int_M \psi\wedge \alpha$. Это задает вложение $\Lambda^{p,q}(M) \hookrightarrow \mathcal{D}^{p,q}(M)$ из форм в потоки.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Потоки это пополнение $\Lambda^{p,q}(M)$ в топологии, двойственной топологии на тест-формах.**

Когомологии потоков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Дифференцирование вдоль векторного поля непрерывно в топологии потоков, значит, **на пространстве потоков определен дифференциал де Рама,** продолженный по непрерывности из пространства форм, а также дифференциалы Дольбо ∂ и $\overline{\partial}$

ЗАМЕЧАНИЕ: Дифференциал де Рама на потоках можно определить формулой $\langle d\alpha, \tau\rangle := -(-1)\tilde{\alpha}\langle \alpha, d\tau\rangle$, где α – поток, а τ – тест-форма.

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите лемму Пуанкаре для потоков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $f: X \longrightarrow Y$ – собственный морфизм комплексных многообразий, $\dim_{\mathbb{C}} X = \dim_{\mathbb{C}} Y + k$ а α – поток на X. Определим **прямой образ** $f_*\alpha$ формулой $\langle f_*\alpha, \tau\rangle := \langle \alpha, f^*\tau\rangle$ Легко видеть, что **$f_*\alpha$ имеет размерность $(p-k, q-k)$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: $df_*\alpha = f_*d\alpha$, $\partial f_*\alpha = f_*\partial\alpha$, и так далее.

ЗАМЕЧАНИЕ: У потоков **не определен** обратный образ, зато определен прямой. У форм нет прямого образа, зато есть обратный.

Формула Пуанкаре-Лелонга

УТВЕРЖДЕНИЕ: (Формула Пуанкаре-Лелонга) Рассмотрим поток на $\mathbb{C}$, заданный формулой $\frac{1}{\pi z}dz$. **Тогда $d\left(\frac{1}{\pi z}dz\right) = \delta_0 \operatorname{Vol}$,** где δ_0 есть δ-функция в 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: **Формула Коши:** для любой функции f на диске D, и $w \in D$, имеем

$$f(w) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-w}dz - \frac{1}{\pi}\int_D \frac{\bar\partial f}{z-w} \wedge dz$$

применив это к тест-функции f с компактным носителем внутри D, получим

$$f(w) = -\left\langle \frac{1}{\pi z}dz, \bar\partial f \right\rangle = \left\langle \bar\partial \left(\frac{1}{\pi z}\right) dz, f \right\rangle = \left\langle d \left(\frac{1}{\pi z}\right) dz, f \right\rangle.$$

(последнее равенство выполнено потому, что $d\eta = \bar\partial\eta$ для любой (1,0)-формы на диске). ■