Комплексная алгебраическая геометрия,

лекция 5: теория Ходжа

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

7 марта 2014

Градуированные векторные пространства и алгебры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Градуированное векторное пространство** есть пространство $V^* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V^i$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Еслу V^* градуировано, пространство эндоморфизмов $\operatorname{End}(V^*) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{End}^i(V^*)$ тоже градуировано,

$$\operatorname{End}^i(V^*) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}(V^j, V^{i+j}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Градуированная алгебра** (или "градуированная ассоциативная алгебра") есть алгебра $A^* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ с умножением, которое совместимо с градуировкой: $A^i \cdot A^j \subset A^{i+j}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Билинейное отображение градуированных пространств, которое удовлетворяет $A^i \cdot B^j \subset C^{i+j}$, называется **градуированным**, или **совместимым с градуировкой**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Категорию градуированных векторных пространств можно определить как **категорию векторных пространств с действием** $U(1)$; весовое разложение определяет градуировку по формуле $\rho(t)|_{A^n} = e^{2\pi\sqrt{-1}\,nt}$. Тогда **градуированная алгебра есть ассоциативная алгебра в категории пространств с $U(1)$-действием.**

Суперкоммутатор

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Оператор на градуированном пространстве называется **четным** (**нечетным**), если он сдвигает градуировку на четное (нечетное) число. **Четность** $\tilde{a}$ оператора a есть 0, если он четный, 1 если нечетный. Мы говорим, что оператор **чистый** если он четный или нечетный.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Суперкоммутатор** чистых элементов определяется формулой $\{a, b\} = ab - (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}} ba$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Градуированная ассоциативная алгебра A^* называется **суперкоммутативной** если в A^* суперкоммутатор равен нулю.

ПРИМЕР: Алгебра Грассмана $\Lambda^* V$ суперкоммутативна.

Супералгебры Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Супералгебра Ли** есть градуированное векторное пространство $\mathfrak{g}^*$ снабженное билинейным градуированным произведением $\{\cdot,\cdot\} : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, которое супер-антикоммутативно:

$$\{a,b\} = -(-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}\{b,a\}$$

и удовлетворяет **супер-тождеству Якоби**

$$\{c,\{a,b\}\} = \{\{c,a\},b\} + (-1)^{\tilde{a}\tilde{c}}\{a,\{c,b\}\}$$

ПРИМЕР: Рассмотрим алгебру $\operatorname{End}^*(V^*)$ всех эндоморфизмов градуированного векторного пространства, с суперкоммутатором, определенным выше. Тогда $\operatorname{End}^*(V^*), \{\cdot,\cdot\}$ **есть супер-алгебра Ли**.

Лемма 1: Пусть d есть нечетный элемент супералгебры Ли над полем характеристики $\neq 2$, удовлетворяющий $\{d,d\} = 0$. **Тогда** $\{\{L,d\},d\} = 0$ для любого L.

Доказательство:

$$0 = \{L,\{d,d\}\} = \{\{L,d\},d\} + (-1)^{\tilde{L}}\{d,\{L,d\}\} = 2\{\{L,d\},d\}.$$

Дифференциал де Рама

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – гладкое многообразие, $\Lambda^* M$ - его алгебра де Рама. Оператор $d: \Lambda^i(M) \longrightarrow \Lambda^{i+1}(M)$ называется **дифференциалом де Рама**, если он удовлетворяет следующим условиям

1. **Градуированное соотношение Лейбница**

$$d(\alpha \wedge \beta) = d(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\tilde{\alpha}} \alpha \wedge d\beta$$

2. $d^2 = 0$

3. На функциях, $d: C^\infty M \longrightarrow \Lambda^1(M)$ – обычный дифференциал.

ЗАМЕЧАНИЕ: Единственность дифференциала де Рама очевидна. Действительно, d определяется своими значениями на образующих $\Lambda^*(M)$. Но эта алгебра порождена $C^\infty M$ и $dC^\infty M$.

Существование d: Достаточно доказать существование d локально, и воспользоваться единственностью для склейки. На $\mathbb{R}^n$, d определяется формулой $d(fP) = \sum_i \frac{df}{dx_i} dx_i \wedge P$ для любого координатного монома $P = dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$.

Теорема Стокса

Теорема Стокса: $\int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta$, если M – гладкое многообразие с краем ∂M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Форма η называется **точной**, если $\eta = d\alpha$, и **замкнутой**, если $d\eta = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку $d^2 = 0$, **любая точная форма замкнута**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: $H^i(M) := \frac{\text{закнутые } i\text{-формы на } M}{\text{точные } i\text{-формы}}$ называется **группой i-х когомологий**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для замкнутой i-формы η и подмногообразия $X \subset M$, **интеграл $\int_X \eta$ зависит только от класса когомологий η и от класса гомотопии X.**

Оператор Ходжа $*$

Пусть V – вещественное векторное пространство. **Метрика на V индуцирует метрику на его тензорных пространствах**, $g(x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_k, x'_1 \otimes x'_2 \otimes ... \otimes x'_k) = g(x_1, x'_1) g(x_2, x'_2) ... g(x_k, x'_k)$

Это задает **невырожденное, положительно определенное скалярное произведение на дифференциальных формах** на римановом многообразии: $g(\alpha, \beta) := \int_M g(\alpha, \beta) \operatorname{Vol}_M$

Другая невырожденная форма задается формулой $\alpha, \beta \longrightarrow \int_M \alpha \wedge \beta$ **(спаривание Пуанкаре).**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – риманово n-мерное многообразие. Определим **оператор Ходжа** $* : \Lambda^k M \longrightarrow \Lambda^{n-k} M$ формулой $g(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge * \beta$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Оператор Ходжа всегда существует**. В ортонормальном базисе $\xi_1, ..., \xi_n \in \Lambda^1 M$, его можно задать на мономах

$$*(\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge ... \wedge \xi_{i_k}) = (-1)^s \xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge ... \wedge \xi_{j_{n-k}},$$

где $\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, ..., \xi_{j_{n-k}}$ – дополнительный набор ковекторов, а s – сигнатура перестановки $(i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_{n-k})$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $*^2\big|_{\Lambda^k(M)} = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{Id}_{\Lambda^k(M)}$

Теория Ходжа

УТВЕРЖДЕНИЕ: На компактном римановом многообразии, имеем $d^*\big|_{\Lambda^k M} = (-1)^{nk} * d*$, где d^* – **сопряженный оператор** к d, $(d\alpha, \gamma) = (\alpha, d^*\gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: По теореме Стокса,

$$0 = \int_M d(\alpha \wedge \beta) = \int_M d(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\tilde{\alpha}} \alpha \wedge d(\beta),$$

значит $(d\alpha, *\beta) = (-1)^{\tilde{\alpha}}(\alpha, *d\beta)$. Написав $\gamma := *\beta$, получаем

$$(d\alpha, \gamma) = (-1)^{\tilde{\alpha}}(\alpha, *d(*)^{-1}\gamma) = (-1)^{\tilde{\alpha}}(-1)^{\tilde{\alpha}(\tilde{n}-\tilde{\alpha})}(\alpha, *d*\gamma) = (-1)^{\tilde{\alpha}\tilde{n}}(\alpha, *d*\gamma).$$

■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Антикоммутатор $\Delta := \{d, d^*\} = dd^* + d^*d$ называется **оператор Лапласа** на M. Это самосопряженный, положительно определенный оператор: $(\Delta x, x) = (dx, dx) + (d^*x, d^*x)$.

Основная теорема теории Ходжа: Существует **базис в гильбертовом пространстве** $L^2(\Lambda^*(M))$, состоящий из собственных векторов Δ, и каждое собственное пространство конечномерно.

ТЕОРЕМА: **(“Эллиптическая регулярность”)** Пусть $\alpha \in L^2(\Lambda^k(M))$ – собственный вектор Δ. **Тогда α – гладкая k-форма.**

Теория Ходжа и когомологии

Определение: Форма α называется **гармонической**, если $\Delta(\alpha) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любой гармонической формы α, $0 = (\Delta\alpha, \alpha) = (d\alpha, d\alpha) + (d^*\alpha, d^*\alpha)$, значит, $\alpha \in \ker d \cap \ker d^*$. Получаем, что **любая гармоническая форма на компактном многообразии замкнута.**

ТЕОРЕМА: Пусть M – компактное, риманово. Тогда естественное отображение $\mathcal{H}^i(M) \longrightarrow H^i(M)$ из гармонических форм в когомологии – изоморфизм.

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $\ker d^* = (\operatorname{im} d)^\perp$, **естественное отображение $\mathcal{H}^i(M) \longrightarrow H^i(M)$ инъективно.**

Шаг 2: $\{d, \{d, d^*\}\} = 0$ по Лемме 1. Поэтому d **коммутирует с Δ.**

Шаг 3: Рассмотрим весовое разложение $\Lambda^*(M) \hat{=} \bigoplus_\alpha \mathcal{H}^*_\alpha(M)$, где α пробегает через все собственные значения Δ. Для каждого α, **дифференциал де Рама сохраняет собственные пространства Δ,** что дает комплекс

$$\mathcal{H}^0_\alpha(M) \xrightarrow{d} \mathcal{H}^1_\alpha(M) \xrightarrow{d} \mathcal{H}^2_\alpha(M) \xrightarrow{d} \dots$$

Теория Ходжа и когомологии (продолжение)

Шаг 4: На $\mathcal{H}^*_\alpha(M)$, имеем $dd^* + d^*d = \alpha$. Когда $\alpha \neq 0$, и η замкнута, это дает $dd^*(\eta) + d^*d(\eta) = dd^*\eta = \alpha\eta$, значит $\eta = d\xi$, где $\xi := \alpha^{-1}d^*\eta$. Значит, для ненулевых α, **комплексы** $(\mathcal{H}^*_\alpha(M), d)$ **не дают вклада в когомологии**

Шаг 5: Мы доказали, что

$$H^i(\Lambda^* M, d) = \bigoplus_\alpha H^i(\mathcal{H}^*_\alpha(M), d) = H^i(\mathcal{H}^*_0(M), d) = \mathcal{H}^i(M).$$

■

ЗАМЕЧАНИЕ: Из этой теоремы сразу следует **двойственность Пуанкаре между** $H^i(M)$ **и** $H^{n-i}(M)$**:** $\int_M \eta \wedge * \eta \neq 0$ для любого η, что дает **невырожденность спаривания** $H^i(M) \otimes H^{n-i}(M) \longrightarrow H^n(M) = H^0(M) = \mathbb{R}$**.** Здесь используется то, что для гармоничного η, форма $*\eta$ тоже гармонична, следовательно, замкнута.

Линеаризация кручения (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Если ∇_1 и ∇_2 – связности на расслоении B, их разность есть сечение $\operatorname{End}(B) \otimes \Lambda^1 M$. **Пространство $\mathcal{A}(B)$ связностей на B есть аффинное пространство**, то есть торсор над пространством сечений $\operatorname{End}(B) \otimes \Lambda^1 M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Кручение есть аффинное отображение

$$\mathcal{A}(\Lambda^1 M) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\Lambda^1 M, \Lambda^2 M) = TM \otimes \Lambda^2 M.$$

потому что $T(\nabla+\alpha) = T(\nabla)+\operatorname{Alt}_{12}(\alpha)$, где $\operatorname{Alt}_{12}: \Lambda^1 M \otimes \operatorname{End}(\Lambda^1 M) \longrightarrow \Lambda^2 M \otimes TM$ есть альтернирование по первым двум индексам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Линеаризованное кручение есть отображение $T_{lin} = \operatorname{Alt}$,

$$T_{lin}: \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^1(M) \otimes TM \longrightarrow \Lambda^2 M \otimes TM$$

полученное как линеаризация кручения.

Связность Леви-Чивита (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на римановом многообразии (M, g) называется **ортогональной**, если $\nabla(g) = 0$, и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – расслоение с метрикой. **Тогда на B всегда существует ортогональная связность.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем покрытие $\{U_i\}$, в котором B тривиально и допускает ортонормальный базис. На каждом U_i выберем связность ∇_i, которая сохраняет этот базис. Пусть ψ_i – разбиение единицы, подчиненное $\{U_i\}$. Тогда **формула $\nabla(b) := \sum \nabla_i(\psi_i b)$ определяет ортогональную связность.** ■

ТЕОРЕМА: ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

Связность Леви-Чивита (существование и единственность).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем ортогональную связность ∇ на $\Lambda^1 M$. Пространство ортогональных связностей – аффинное, и **его линеаризация есть $\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$.**

Шаг 1: Отождествляя TM и $\Lambda^1 M$, получаем $\mathfrak{so}(TM) = \Lambda^2 M$.

Шаг 2: Линеаризованное кручение есть отображение

$$T_{lin}: \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM) = \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^2 M \xrightarrow{\mathrm{Alt}} \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1 M = \Lambda^2 M \otimes TM.$$

Это изоморфизм. Справа и слева расслоения одной размерности, так что **достаточно доказать, что T_{lin} нет ядра.** Но если $\eta \in \ker T_{lin}$, η **симметрична по первым двум аргументам и кососимметрична по последним,** что дает $\eta(x,y,z) = \eta(y,x,z) = -\eta(y,z,x)$. **То есть $\sigma(\eta) = -\eta$, где σ есть циклическая перестановка аргументов.** Поскольку $\sigma^3 = 1$, из этого следует, что $\eta = 0$.

Шаг 3: Мы получили, что **ортогональная связность однозначно задается своим кручением,** ибо кручение задает изоморфизм аффинных пространств.

Шаг 4: Возьмем $\nabla := \nabla_0 - T_{lin}^{-1}(T_{\nabla_0})$. Тогда $T_\nabla = T_{\nabla_0} - T_{lin}(T_{lin}^{-1}(T_{\nabla_0})) = 0$, значит **$\nabla$ – связность без кручения.** ■

Кручение G-структур. Повторение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа Ли, снабженная гомоморфизмом в $GL(n)$. **G-структура** на n-мерном многообразии M есть редукция структурной группы TM с $GL(n)$ до G.

ЗАМЕЧАНИЕ: G-Связности на TM являются аффинным пространством над $\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ есть структурная алгебра Ли. Поэтому **кручение есть аффинное отображение из пространства $\mathcal{A}_G$ G-связностей в $\Lambda^2 M \otimes TM$,** а его линеаризация – $\mathrm{Alt} : \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \Lambda^2 M \otimes TM$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Расслоение тензоров внутреннего кручения** $_G$ (intrinsic torsion bundle) G-структуры на M есть фактор

$$T_G := \frac{\Lambda^2 M \otimes TM}{\mathrm{Alt}(\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{g})}.$$

Кручение (intrinsic torsion) G-структуры есть образ ее кручения в $_G$.

Кручение G-структур (продолжение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Расслоение тензоров внутреннего кручения $_G$** (intrinsic torsion bundle) G-структуры на M есть фактор $T_G := \frac{\Lambda^2 M \otimes TM}{\mathrm{Alt}(\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{g})}$. **Внутреннее кручение** (intrinsic torsion) G-структуры есть образ ее кручения в $_G$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Кручение G-структуры не зависит от выбора связности.** Действительно, если две связности отличаются на A, их тензоры кручения отличаются на $\mathrm{Alt}(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим G-структуру $\mathfrak{G}$ на M. Тогда **на TM есть G-связность без кручения тогда и только тогда, когда кручение $\mathfrak{G}$ зануляется.**

ПРИМЕР: Для $G = SO(n)$, расслоение $T_G = \frac{\Lambda^2 M \otimes TM}{\mathrm{Alt}(\Lambda^1 M \otimes \Lambda^2 M)}$ тривиально. **Соответствующая связность без кручения есть связность Леви-Чивита.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Импликация $d\omega = 0 \Rightarrow \nabla(\omega) = 0$ для кэлеровых многообразий **состоит в вычислении внутреннего кручения соответствующей $U(n)$-структуры.**

Кручение почти комплексных эрмитовых многообразий

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть (M, I, ω) – эрмитово почти комплексное многообразие, ∇, ∇_1 – связности, сохраняющие I и ω, а $A := \nabla - \nabla_1$ – форма связности, $A \in \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{u}(TM) = \Lambda^1 M \otimes \Lambda^{1,1}(M)$. Тогда $\operatorname{Alt}_{12}(A) \in \mathfrak{W}$, где

$$\mathfrak{W} := \Lambda^{2,0}(M) \otimes \Lambda^{0,1}(M) \oplus \Lambda^{0,2} \otimes \Lambda^{1,0}(M) \oplus \Lambda^{1,1}(M) \otimes \Lambda^1 M.$$

Кроме того, кососимметризация формы $\operatorname{Alt}_{12}(A)(\cdot, \cdot, I\cdot)$ по всем трем аргументам равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Из разложения по типам A следует, что $\Lambda^{2,0}() \otimes \Lambda^{1,0}(M)$ и $\Lambda^{0,2} \otimes \Lambda^{0,}(M)$ части в $\operatorname{Alt}_{12}(A)$ зануляются. Это дает первое утверждение.

Второе следует из того, что форма $A(\cdot, \cdot, I\cdot)$ симметрична по последним двум аргументам, значит, ее кососимметризация $\operatorname{Alt}_{123}(A(\cdot, \cdot, I\cdot))$ равна нулю; но

$$\operatorname{Alt}_{123}(A(\cdot, \cdot, I\cdot)) = \operatorname{Alt}_{123}(\operatorname{Alt}_{12}(A(\cdot, \cdot, I\cdot))).$$

■

Кручение почти комплексных эрмитовых многообразий (продолжение)

Следствие 1: Образ $\mathsf{Alt}_{12}(\Lambda^1 M \otimes \Lambda^{1,1}(M))$ равен пространству всех форм $\eta \in \mathfrak{W}$ удовлетворяющих $\mathfrak{A}(\eta) = 0$, где $\mathfrak{A}: \mathfrak{W} \longrightarrow \Lambda^{2,1}(M) \oplus \Lambda^{1,2}(M)$ – отображение, определенное формулой

$$\mathfrak{A}(\eta)(\cdot,\cdot,\cdot) = \mathsf{Alt}_{123}(\eta(\cdot,\cdot,I\cdot)) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Кососимметризация Alt_{12} задает вложение из $\Lambda^1 M \otimes \Lambda^{1,1}(M)$ в $\mathfrak{W}$, как следует из аргумента, доказывающего единственность связности Леви-Чивита. Образ этого отображения содержится в ядре $\mathfrak{A}$, как доказано выше.

Образ $\mathfrak{A}$ равен $\Lambda^{2,1}(M) \oplus \Lambda^{1,2}(M)$, значит, размерность ядра $\mathfrak{A}$ равна размерности $\Lambda^{1,1}(M) \otimes \Lambda^1 M$. **Поэтому**

$$\mathsf{Alt}_{12}: \Lambda^1 M \otimes \Lambda^{1,1}(M) \longrightarrow \ker \mathfrak{A}$$

— изоморфизм. ■

Кручение унитарной связности для кэлеровых многообразий

Утверждение 1: Пусть (M, I, ω) – эрмитово комплексное многообразие, ∇ – связность, сохраняющая I и ω, а $T_\nabla \in \Lambda^2 M \times TMM = \Lambda^2 M \times \Lambda^1 M$ ее кручение (отождествление TM и $\Lambda^1 M$ использует риманову форму). Тогда $T_\nabla \in \mathfrak{W}$, где

$$\mathfrak{W} = \Lambda^{2,0}(M) \otimes \Lambda^{0,1}(M) \oplus \Lambda^{0,2} \otimes \Lambda^{1,0}(M) \oplus \Lambda^{1,1}(M) \otimes \Lambda^1 M.$$

Если к тому же $d\omega = 0$, то $\mathsf{Alt}_{12}(T_\nabla)$ лежит в $\ker \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A} : \mathfrak{W} \longrightarrow \Lambda^{2,1}(M) \oplus \Lambda^{1,2}(M)$ отображение, определенное выше,

$$\mathfrak{A}(\eta)(\cdot,\cdot,\cdot) = \mathsf{Alt}_{123}(\eta(\cdot,\cdot,I\cdot)) = 0.$$

Доказательство. Шаг 1: Поскольку ∇ сохраняет $T^{1,0}(M)$, $\nabla_X T^{1,0}(M) \subset T^{1,0}(M)$. Поэтому для любых $X, Y \in T^{1,0}(M)$, имеем $T_\nabla(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ то есть $T_\nabla(X,Y) \in T^{1,0}(M)$. С другой стороны, g в силу эрмитовости спаривает $T^{1,0}$ с $T^{0,1}$, то есть **после отождествления TM и $\Lambda^1 M$, компоненты вида $\Lambda^{2,0}(M) \otimes \Lambda^{1,0}(M)$ и $\Lambda^{0,2}() \otimes \Lambda^{0,1}(M)$ зануляются.**

Кручение для кэлеровых многообразий (продолжение)

Шаг 2: $\nabla\omega = 0$ влечет

$$\omega(\nabla_X Y, Z) + \omega(Y, \nabla_X Z) = \operatorname{Lie}_X \omega(X, Y). \qquad (*)$$

Формула Картана

$$\begin{aligned} d(\rho)(X_1, ..., X_{n+1}) = & \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} \operatorname{Lie}_{X_i}(\rho(X_1, ..., \check{X}_i, ..., X_{n+1})) \\ & - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (-1)^{i+j} \rho([X_i, X_j], X_1, ..., \check{X}_i, ..., \check{X}_j, ..., X_{n+1}), \end{aligned}$$

вместе с (*) дает

$$d\omega = \omega(T_\nabla(X, Y), Z) + \omega(X, T_\nabla(Y, Z)) - \omega(T_\nabla(X, Z), Y).$$

Шаг 3: По определению, $\omega(T_\nabla(X, Y), Z) = g(T_\nabla(X, Y), IZ)$, а кососимметризация этого тензора равна $\mathfrak{A}(T_\nabla)(X, Y, Z)$. **В силу шага 2, она зануляется, что дает $T_\nabla \in \ker \mathfrak{A}$.** ■

Связность Леви-Чивита для кэлеровых многообразий

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I, ω) кэлерово многообразие, а ∇ – связность Леви-Чивита. Тогда $\nabla(I) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем какую-то связность ∇, сохраняющую метрику и I. В силу Утверждения 1, $T_\nabla \in \ker \mathfrak{A}$. В силу Следствия 1, $\operatorname{Alt}_{12}(\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{u}(TM)) = \ker \mathfrak{A}$. Поэтому существует форма связности $A \in \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{u}(TM)$ такая, что $\nabla - A$ не имеет кручения. Эта связность унитарна, значит, равна связности Леви-Чивита. ■