Комплексная алгебраическая геометрия,

лекция 4: связность Бисмута

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

28 февраля 2014

Связности и кручение (повторение)

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространство сечений расслоения B на гладком многообразии обозначается B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на векторном расслоении B есть отображение $B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes B$ удовлетворяющее $\nabla(fb) = df \otimes b + f\nabla b$ для любых $b \in B$, $f \in C^\infty M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $X \in TM$ – векторное поле, $b \in B$, то **$\nabla_X b$ – сечение B, полученное как $\langle \nabla b, X \rangle$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любого тензорного расслоения $\mathcal{B}_1 := B^* \otimes B^* \otimes ... \otimes B^* \otimes B \otimes B \otimes ... \otimes B$ **связность на B определяет связность на $\mathcal{B}_1$** по **формуле Лейбница:**

$$\nabla(b_1 \otimes b_2) = \nabla(b_1) \otimes b_2 + b_1 \otimes \nabla(b_2).$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Связности образуют **аффинное пространство** над пространством сечений расслоения $\operatorname{End}(B) \otimes \Lambda^1 M$.

Кручение (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть ∇ – связность на $\Lambda^1 M$,

$$\Lambda^1 \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$$

Кручение ∇ задается формулой $T_\nabla := \operatorname{Alt} \circ \nabla - d$, где

$$\operatorname{Alt}: \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^2 M$$

- внешнее умножение. Кручение есть отображение $T_\nabla : \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^2 M$.

ЗАМЕЧАНИЕ:

$$\begin{aligned} T_\nabla(f\eta) &= \operatorname{Alt}(f\nabla\eta + df \otimes \eta) - d(f\eta) \\ &= f\Big[\operatorname{Alt}(\nabla\eta) - d\eta\Big] + df \wedge \eta - df \wedge \eta = fT_\nabla(\eta). \end{aligned}$$

Значит, T_∇ линейно.

ЗАМЕЧАНИЕ:
Кручение часто определяют как отображение $\Lambda^2 TM \longrightarrow TM$ формулой $\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X,Y]$. Это оператор, двойственный определенному выше.

Аффинные пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Торсор** над группой G есть пространство X, снабженное свободным и транзитивным действием G, $g, x \longrightarrow \rho(g, x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Морфизм** торсоров $(X, G, \rho) \xrightarrow{\Psi} (X', G', \rho')$ есть пара $\Psi_X : X \longrightarrow X', \Psi_G : G \longrightarrow G'$, где Ψ_G есть гомоморфизм групп, и согласованное с действием G, G' на X, X' так: $\Psi_X(\rho(g, x)) = \rho'(\Psi_G(g), \Psi_X(x))$

ЗАМЕЧАНИЕ: **Торсоры образуют категорию.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Аффинное пространство** есть торсор над линейным пространством V, которое называется его **линеаризацией**.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Действие V на A обозначается $a, v \longrightarrow a + v$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Морфизм** аффинных пространств есть морфизм соответствующих торсоров.

ЗАМЕЧАНИЕ: Это то же самое, что отображение $A \xrightarrow{\Psi_A} A'$, плюс гомоморфизм линеаризаций $L \xrightarrow{\Psi_L} L'$ такой, что $\Psi_A(a+l) = \Psi_A(a) + \Psi_L(l)$.

Линеаризация кручения

ЗАМЕЧАНИЕ: Если ∇_1 и ∇_2 – связности на расслоении B, их разность есть сечение $\operatorname{End}(B)\otimes\Lambda^1 M$. **Пространство $\mathcal{A}(B)$ связностей на B есть аффинное пространство**, то есть торсор над пространством сечений $\operatorname{End}(B)\otimes\Lambda^1 M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Кручение есть аффинное отображение

$$\mathcal{A}(\Lambda^1 M) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\Lambda^1 M, \Lambda^2 M) = TM\otimes\Lambda^2 M.$$

потому что $T(\nabla+\alpha) = T(\nabla)+\operatorname{Alt}_{12}(\alpha)$, где $\operatorname{Alt}_{12}: \Lambda^1 M\otimes\operatorname{End}(\Lambda^1 M) \longrightarrow \Lambda^2 M\otimes TM$ есть альтернирование по первым двум индексам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Линеаризованное кручение есть отображение $T_{lin} = \operatorname{Alt}$,

$$T_{lin}: \Lambda^1(M)\otimes\Lambda^1(M)\otimes TM \longrightarrow \Lambda^2 M\otimes TM$$

полученное как линеаризация кручения.

Связность Леви-Чивита

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на римановом многообразии (M, g) называется **ортогональной**, если $\nabla(g) = 0$, и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть B – расслоение с метрикой. **Тогда на B всегда существует ортогональная связность.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем покрытие $\{U_i\}$, в котором B тривиально и допускает ортонормальный базис. На каждом U_i выберем связность ∇_i, которая сохраняет этот базис. Пусть ψ_i – разбиение единицы, подчиненное $\{U_i\}$. Тогда **формула $\nabla(b) := \sum \nabla_i(\psi_i b)$ определяет ортогональную связность.** ■

ТЕОРЕМА: ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

Связность Леви-Чивита (существование и единственность)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Выберем ортогональную связность ∇ на $\Lambda^1 M$. Пространство ортогональных связностей – аффинное, и **его линеаризация есть $\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$.**

Шаг 1: Отождествляя TM и $\Lambda^1 M$, получаем $\mathfrak{so}(TM) = \Lambda^2 M$.

Шаг 2: Линеаризованное кручение есть отображение

$$T_{lin}: \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM) = \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^2 M \xrightarrow{\mathsf{Alt}} \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1 M = \Lambda^2 M \otimes TM.$$

Это изоморфизм. Справа и слева расслоения одной размерности, так что **достаточно доказать, что T_{lin} нет ядра.** Но если $\eta \in \ker T_{lin}$, η **симметрична по первым двум аргументам и кососимметрична по последним,** что дает $\eta(x,y,z) = \eta(y,x,z) = -\eta(y,z,x)$. **То есть $\sigma(\eta) = -\eta$, где σ есть циклическая перестановка аргументов.** Поскольку $\sigma^3 = 1$, из этого следует, что $\eta = 0$.

Шаг 3: Мы получили, что **ортогональная связность однозначно задается своим кручением,** ибо кручение задает изоморфизм аффинных пространств.

Шаг 4: Возьмем $\nabla := \nabla_0 - T_{lin}^{-1}(T_{\nabla_0})$. Тогда $T_\nabla = T_{\nabla_0} - T_{lin}(T_{lin}^{-1}(T_{\nabla_0})) = 0$, значит **$\nabla$ – связность без кручения**. ■

Кручение G-структур (для тех, кто знаком с G-структурами)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть G – группа Ли, снабженная гомоморфизмом в $GL(n)$. **G-структура** на n-мерном многообразии M есть редукция структурной группы TM с $GL(n)$ до G.

ЗАМЕЧАНИЕ: G-Связности на TM являются аффинным пространством над $\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ есть структурная алгебра Ли. Поэтому **кручение есть аффинное отображение из пространства $\mathcal{A}_G$ G-связностей в $\Lambda^2 M \otimes TM$,** а его линеаризация – $\operatorname{Alt}: \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \Lambda^2 M \otimes TM$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Расслоение тензоров внутреннего кручения** $_G$ (intrinsic torsion bundle) G-структуры на M есть фактор

$$T_G := \frac{\Lambda^2 M \otimes TM}{\operatorname{Alt}(\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{g})}.$$

Кручение (intrinsic torsion) G-структуры есть образ ее кручения в $_G$.

Кручение G-структур (продолжение) (для тех, кто знаком с G-структурами)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Расслоение тензоров внутреннего кручения** $_G$ (intrinsic torsion bundle) G-структуры на M есть фактор $T_G := \frac{\Lambda^2 M \otimes TM}{\mathrm{Alt}(\Lambda^1 M \otimes \mathfrak{g})}$. **Внутреннее кручение** (intrinsic torsion) G-структуры есть образ ее кручения в $_G$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Кручение G-структуры не зависит от выбора связности.** Действительно, если две связности отличаются на A, их тензоры кручения отличаются на $\mathrm{Alt}(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим G-структуру $\mathfrak{G}$ на M. Тогда **на TM есть G-связность без кручения тогда и только тогда, когда кручение $\mathfrak{G}$ зануляется.**

ПРИМЕР: Для $G = SO(n)$, расслоение $T_G = \frac{\Lambda^2 M \otimes TM}{\mathrm{Alt}(\Lambda^1 M \otimes \Lambda^2 M)}$ тривиально. **Соответствующая связность без кручения есть связность Леви-Чивита.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Импликация $d\omega = 0 \Rightarrow \nabla(\omega) = 0$ для кэлеровых многообразий **состоит в вычислении внутреннего кручения соответствующей $U(n)$-структуры.**

Связность Леви-Чивита на кэлеровом многообразии (повторение)

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I, g) – почти комплексное эрмитово многообразие. **Тогда следующие условия эквивалентны:**

(i) **Комплексная структура I интегрируема, а эрмитова форма ω замкнута.**

(ii) $\nabla(I) = 0$**,** где ∇ есть связность Леви-Чивита.

ЗАМЕЧАНИЕ: Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) довольно очевидна. Действительно, $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, значит, коммутатор $(1,0)$-векторных полей – снова типа $(1,0)$, что влечет интегрируемость I. Также, **∇ – связность без кручения, что влечет $d\omega = \mathrm{Alt}(\nabla\omega)$,** значит, $d\omega = 0$.

Связность Бисмута

ЗАМЕЧАНИЕ: На римановом многообразии, кручение $T_\nabla \in \Lambda^2 M \otimes TM$ удобно рассматривать как сечение $T'_\nabla \in \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1 M$, отождествляя TM и $\Lambda^1 M$ с помощью g.

Доказательство импликации (i) $\Rightarrow$ (ii). немедленно вытекает из теоремы Бисмута.

ТЕОРЕМА: (Бисмут) Пусть (M, I, g) – комплексное эрмитово расслоение. **Тогда существует и единственна связность ∇_b, сохраняющая I и g, такая, что тензор кручения $T'_{\nabla_b} \in \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1 M$ кососимметричен. В этой ситуации, $T'_{\nabla_b} = -I(d\omega)$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Такая связность называется **связностью Бисмута**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Единственность связности Бисмута следует из того, что **ортогональная связность однозначно задается своим кручением.**

Линеаризация кручения на эрмитовом многообразии

Доказательство теоремы Бисмута. Шаг 1: Выберем связность ∇, сохраняющую I и g. Разность α двух таких связностей есть 1-форма с коэффициентами в пространстве косоэрмитовых матриц, $\alpha \in \Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(TM)$. Значит, **пространство связностей, сохраняющих I и g, есть аффинное пространство над пространством сечений $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{u}(TM)$.**

Шаг 2: $\mathfrak{u}(TM)$ **отождествляется с $\Lambda^{1,1}M$.** Тогда линеаризация кручения есть отображение

$$T_{lin}: \Lambda^1(M) \otimes \Lambda^{1,1}(M) \xrightarrow{\text{Alt}} \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1(M).$$

Шаг 3: ∇ сохраняет разложение Ходжа, а I интегрируема, что дает $T_\nabla(X^{1,0}, Y^{1,0}) \subset T^{1,0}(M)$ для любых $X^{1,0}, Y^{1,0} \in T^{1,0}(M)$. Это следует из

$$T_\nabla(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

Шаг 4: Значит, T'_∇ принадлежит

$$\Lambda^{1,1}(M) \otimes \Lambda^1(M) \oplus \Lambda^{2,0} \otimes \Lambda^{0,1}(M) \oplus \Lambda^{0,2} \otimes \Lambda^{1,0}(M)$$

потому что **при подстановке туда двух $(1,0)$-векторов оно дает $(0,1)$-форму.**

Линеаризация кручения на эрмитовом многообразии (2)

Шаг 5: Для $\alpha \in \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$, продолжим α на $\Lambda^* M$ по формуле Лейбница $\alpha(\eta\wedge\eta') = \alpha(\eta)\wedge\eta' + (-1)^{\deg\eta}\alpha(\eta')$. Запишем связность Леви-Чивита формулой $\nabla_{LC} = \nabla + \alpha$. **Тогда $\alpha = T_{lin}^{-1}(T'_\nabla)$.** Это дает

$$d\omega = \operatorname{Alt}(\nabla_{LC}\omega) = \operatorname{Alt}(\nabla\omega + \alpha\omega) = \operatorname{Alt}(T_{lin}^{-1}(T'_\nabla)(\omega)).$$

Шаг 6: Обозначим за $A: \ \Lambda^2 M \otimes \Lambda^1 M$ операцию, переводящую τ в $\operatorname{Alt}(T_{lin}^{-1}(\tau)(\omega))$. Поскольку $A(T'_\nabla) = d\omega$, $A(T'_\nabla)$ не зависит выбора связности ∇, сохраняющей I, g. Значит, $T_{lin}\circ A = 0$, и **линеаризация кручения задает комплекс расслоений**

$$\begin{aligned}
&\Lambda^1(M)\otimes\Lambda^{1,1}(M)\\
&\xrightarrow{T_{lin}} \Lambda^{1,1}M\otimes\Lambda^1(M)\oplus\Lambda^{2,0}\otimes\Lambda^{0,1}(M)\oplus\Lambda^{0,2}\otimes\Lambda^{1,0}(M) \qquad (*)\\
&\xrightarrow{A} \Lambda^{2,1}(M)\oplus\Lambda^{1,2}(M).
\end{aligned}$$

Шаг 7: Пусть $\tau \in \Lambda^1 M \otimes \Lambda^2 M = \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$. Рассмотрим τ как отображение $V_\tau: \ \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$ и продолжим до отображения $\Lambda^i M \longrightarrow \Lambda^1 M \otimes \Lambda^i M$ по формуле Лейбница, $V_\tau(\eta\wedge\eta') = V_\tau(\eta)\wedge\eta' + (-1)^{\deg\eta} V_\tau(\eta')$.
Тогда $V_\tau(\omega)(\cdot,\cdot,\cdot) = \tau(\cdot,\cdot,I\cdot)$ (проверьте это).

Линеаризация кручения на эрмитовом многообразии (3)

Шаг 8: Если τ – 3-форма, $\tau \in \Lambda^3 M \subset \Lambda^1 M \otimes \Lambda^2 M = \Lambda^1 M \otimes \mathfrak{so}(TM)$, то $T_{lin}(\tau) = \tau$, значит,

$$A(\tau) = \operatorname{Alt}(T_{lin}^{-1}(\tau)(\omega)) = \operatorname{Alt}(V_\tau(\omega)) = \operatorname{Alt}(\tau(\cdot, \cdot, I\cdot)).$$

Это дает $A(\tau) = \mathcal{I}(\tau)$, где $\mathcal{I}(\tau)(\cdot, \cdot, \cdot) = \tau(I\cdot, \cdot, \cdot) + \tau(\cdot, I\cdot, \cdot) + \tau(\cdot, \cdot, I\cdot)$. Поэтому **для кососимметричного тензора τ имеем $A(\tau) = \mathcal{I}(\tau)$.**

Шаг 9: Поскольку $A(T'_\nabla) = d(\omega)$ (шаг 6) для связности с кососимметричным кручением τ, имеем $d(\omega) = \mathcal{I}(\tau)$ (шаг 8). С другой стороны **$d\omega$ лежит в $\Lambda^{2,1}(M) \oplus \Lambda^{1,2}(M)$ в силу интегрируемости, значит, $\mathcal{I}(d\omega) = I(d\omega)$. Это влечет $\tau = \mathcal{I}^{-1}(d\omega) = -Id\omega$. Мы доказали формулу для кручения в утверждении теоремы Бисмута.**

Шаг 10: Поскольку $\mathcal{I}: \ \Lambda^3(M) \longrightarrow \Lambda^3(M)$ изоморфизм, из предыдущего шага вытекает, что $A\Big|_{\Lambda^{2,1}(M) \oplus \Lambda^{1,2}(M)} \longrightarrow \Lambda^{2,1}(M) \oplus \Lambda^{1,2}(M)$ – изоморфизм. **Значит, правая стрелка комплекса (*) – наложение.**

Линеаризация кручения на эрмитовом многообразии (4)

Шаг 11: Из вычисления размерностей, инъективности левой стрелки и сюрьективности правой вытекает, что **(*) - точная последовательность.**

$$\begin{aligned}&\Lambda^1(M)\otimes\Lambda^{1,1}(M)\\ &\quad\xrightarrow{T_{lin}}\Lambda^{1,1}M\otimes\Lambda^1(M)\oplus\Lambda^{2,0}\otimes\Lambda^{0,1}(M)\oplus\Lambda^{0,2}\otimes\Lambda^{1,0}(M) \qquad (*)\\ &\qquad\xrightarrow{A}\Lambda^{2,1}(M)\oplus\Lambda^{1,2}(M).\end{aligned}$$

Шаг 12: Пусть $\mathcal{A}(I,g)$ есть пространство связностей на $\Lambda^1 M$, сохраняющих I и g. Поскольку $A(T'_\nabla)=d\omega$ (шаг 6), отображение $\nabla\longrightarrow T'_\nabla$ индуцирует морфизм аффинных пространств

$$\mathcal{A}(I,g)\xrightarrow{\mathcal{T}}A^{-1}(d\omega).$$

Поскольку (*) – точная последовательность, $\mathcal{T}$ является изоморфизмом.

Шаг 13: Как доказано на шаге 9, $A(-Id\omega)=d\omega$. Поскольку $\mathcal{T}$ есть изоморфизм, **существует и единственна связность $\mathcal{T}^{-1}(-Id\omega)$, кручение которой удовлетворяет $T'_\nabla=-Id\omega$.**