Комплексная алгебраическая геометрия,

лекция 3: кэлеровы многообразия

Миша Вербицкий

НМУ/ВШЭ, Москва

21 февраля 2014

Разложение Ходжа (повторение)

Обозначим за $\Lambda^* V$ грассманову алгебру, порожденную V.

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что $\Lambda^*(V \oplus W)$ изоморфно как векторное пространство $\Lambda^* V \otimes \Lambda^* W$. Изоморфизм $\Lambda^* V \otimes \Lambda^* W \longrightarrow \Lambda^*(V \oplus W)$ задается отображением $x \otimes y \longrightarrow x \wedge y$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (V, I) – пространство, снабженное комплексной структурой, а $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ его комплексификация. Тогда $\Lambda^* V_{\mathbb{C}} \cong (\Lambda^* V^{1,0}) \otimes (\Lambda^* V^{0,1})$. Рассмотрим разложение $\Lambda^* V_{\mathbb{C}} \cong \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q} V_{\mathbb{C}}$, где $\Lambda^{p,q} V_{\mathbb{C}} = \Lambda^p V^{1,0} \bigwedge \Lambda^q V^{0,1}$ Оно называется **разложением Ходжа**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Комплексная структура на V **однозначно задает комплексную структуру на V^* (и наоборот).**

Почти комплексные многообразия (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Почти комплексная структура** на многообразии есть оператор $I \in \operatorname{End} TM$ в эндоморфизмах касательного расслоения, удовлетворяющий $I^2 = -\operatorname{Id}_{TM}$.

ПРИМЕР: Возьмем $\mathbb{C}^n$, с комплексными координатами $z_i = x_i + \sqrt{-1}\, y_i$. Тогда $I(x_i) = y_i$, $I(y_i) = -x_i$ – почти комплексная структура.

Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие. Обозначим за

$$\Lambda^{*,0}(M) := \bigoplus_p \Lambda^{p,0}(M), \quad \Lambda^{0,*}(M) := \bigoplus_q \Lambda^{0,q}(M)$$

подалгебры в алгебре де Рама, порожденные $\Lambda^{1,0}(M) = (T^*M)^{1,0}$ и $\Lambda^{0,1}(M) = (T^*M)^{0,1}$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Разложение Ходжа** на дифференциальных формах записывается $\Lambda^*(M) = \bigoplus_{p,q} \Lambda^{p,q}(M)$, причем $\Lambda^{p,q}(M) = \Lambda^{p,0}(M) \bigwedge \Lambda^{0,q}(M)$.

Комплексные многообразия (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Окольцованное пространство** есть топологическое пространство с заданным на нем пучком колец.

ПРИМЕР: **Открытый шар $B \subset \mathbb{C}^n$ с пучком $\mathcal{O}_B$ голоморфных функций является окольцованным пространством.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Комплексное многообразие** $(M, \mathcal{O}_M)$ есть окольцованное пространство, которое локально изоморфно (как окольцованное пространство) открытому шару $(B, \mathcal{O}_B)$

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть U_1, U_2 – два открытых подмножества в комплексном многообразии, а f_1, f_2 – изоморфизмы U_1, U_2 с открытым шаром. Композиция $f_1 f_2^{-1}$ задает изоморфизм окольцованных пространств $f_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow f_2(U_1 \cap U_2)$. **В силу Следствия (*), этот изоморфизм голоморфен.**

СЛЕДСТВИЕ: Мы получаем, что **комплексное многообразие имеет атлас из открытых подмножеств, которые гомеоморфны открытым шарам в $\mathbb{C}^n$, а функции перехода голоморфны.**

Интегрируемость почти комплексных структур (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, а $\mathcal{O}_M$ пучок голоморфных функций на нем. Оно называется **интегрируемым**, если $(M, \mathcal{O}_M)$ – комплексное многообразие.

ЗАМЕЧАНИЕ: Почти комплексная структура восстанавливается из комплексной структуры на M следующим образом.

(1) Рассмотрим **расслоение $\Lambda^{1,0}(M) \subset \Lambda^1(M, \mathbb{C})$, порожденное дифференциалами голоморфных функций,** и пусть $\Lambda^{0,1}(M) := \overline{\Lambda^{1,0}(M)}$.

(2) Определим $I \in \operatorname{End}(\Lambda^1 M \otimes \mathbb{C})$ таким образом, что $I|_{\Lambda}{}^{1,0}(M) = \sqrt{-1}$ и $I|_{\Lambda}{}^{0,1}(M) = -\sqrt{-1}$. **Очевидно, $I^2 = -\operatorname{Id}$.**

(3) Этот эндоморфизм вещественный, поскольку $\overline{I} = I$ в силу его определения. Поэтому **он переводит $\Lambda^1(M, \mathbb{R})$ в себя.**

Мы получили функтор (строгий, полный) из категории комплексных многообразий в категорию почти комплексных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексная структура I на M называется **интергрируемой**, если (M, I) получено из комплексного многообразия вышеописанным образом.

Формальная интегрируемость (повторение)

УПРАЖНЕНИЕ: Докажите, что в комплексных координатах $z_1, ..., z_n$ на $\mathbb{C}^n$, **голоморфные векторные поля записываются в виде** $X = \sum \varphi_i \frac{d}{dz_i}$, где $\varphi_1, ..., \varphi_n$ – голоморфные функции.

СЛЕДСТВИЕ: **Голоморфные векторные поля на комплексном многообразии порождают $T^{1,0}M$ над $C^\infty M$.**

СЛЕДСТВИЕ: На комплексном многообразии, **коммутатор векторных полей типа $(1,0)$ имеет тип $(1,0)$: $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексное многообразие называется **формально интегрируемым**, если $[T^{1,0}M, T^{1,0}M] \subset T^{1,0}M$

ТЕОРЕМА: (Newlander-Nirenberg) **Формально интегрируемое почти комплексное многообразие гладкости C^2 интегрируемо.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Я докажу эту теорему **для вещественно-аналитических многообразий**.

Вещественно аналитические многообразия (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Антикомплексной инволюцией на комплексном многообразии называется непрерывная инволюция ι, $\iota^2 = \mathrm{Id}$, переводящая голоморфные функции на $U \subset M$ в антиголоморфные на $\iota(U)$.

УПРАЖНЕНИЕ: Проверьте, что множество неподвижных точек X_ι антикомплексной инволюции – **гладкое многообразие, причем** $\dim_{\mathbb{R}} X_\iota = \dim_{\mathbb{C}} X$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть X – открытый шар в $\mathbb{C}^n$, снабженный стандартной антикомплексной инволюцией $z \longrightarrow \overline{z}$, а α – голоморфный тензор на X, который зануляется в $M = X_\iota$. **Тогда** $\alpha = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно проверить утверждение, когда $n = 1$. Мы получаем такой факт: голоморфная функция, определенная в окрестности отрезка, которая равна нулю на отрезке, зануляется. Это следует из разложения Тэйлора. ■

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть M – вещественно-аналитическое многообразие. Тогда M можно реализовать как множество X^τ неподвижных точек антикомплексной инволюции τ в комплексном многообразии X. При этом каждый вещественно-аналитический тензор на M однозначно продолжается до голоморфного тензора в небольшой окрестности X^τ.

Тензор Ниенхойса (повторение)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть (M, I) – почти комплексное многообразие, $T^{1,0} \subset TM \otimes \mathbb{C}$ – подрасслоение векторов типа $(1, 0)$, а $[T^{1,0}, T^{1,0}] \xrightarrow{N} TM \otimes \mathbb{C}/T^{1,0}$ – скобка Фробениуса. Отождествив $TM \otimes \mathbb{C}/T^{1,0}$ с $T^{0,1}$, мы представим N как оператор

$$N : \Lambda^2(T^{1,0}M) \longrightarrow T^{0,1}M.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Этот оператор называется **тензором Ниейхойса** (Nijenhuis tensor). Его можно преставить как сечение $N \in \Lambda^{2,0}M \otimes T^{0,1}M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Тензор Ниенхойса вещественно-аналитического многообразия тоже вещественно-аналитичен.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Теорема Ньюлендера-Ниренберга выводит интегрируемость из $N = 0$.

Теорема Ньюлендера-Ниренберга (повторение)

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I) – вещественно-аналитическое почти комплексное многообразие, причем $[T^{1,0}, T^{1,0}] \subset T^{1,0}$. **Тогда почти комплексная структура I интегрируема.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно доказывать утверждение локально. Пусть $M = B_{\mathbb{R}}$ – вещественный шар, а $X = B_{\mathbb{C}}$ – комплексный шар, снабженный антикомплексной инволюцией, причем $M = X_\iota$.

Шаг 1: Пусть

$$\Pi^{1,0} : TX|_M = TM \otimes \mathbb{C} \longrightarrow T^{1,0}M \subset TX|_M$$

– естественная проекция вдоль $T^{0,1}$. Продолжим $\Pi^{1,0}$ до голоморфного тензора на X (если не продолжается, заменим X на меньшую окрестность $M \subset X$). Сделаем то же самое с $\Pi^{1,0}$. **Получим разложение $TX|_M = \operatorname{im}\Pi^{1,0} \oplus \operatorname{im}\Pi^{0,1}$.** Обозначим $T^{1,0}X := \operatorname{im}\Pi^{1,0}$, $T^{0,1}X := \operatorname{im}\Pi^{0,1}$.

Шаг 2: Перейдя к меньшей окрестности, если нужно, можно считать, что **разложение $TX = T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$ определено на всем X и голоморфно.**

Теорема Ньюлендера-Ниренберга (2)

Шаг 3: Пусть α – голоморфный тензор на X, который зануляется в $M = X_\iota$. **Тогда $\alpha = 0$** (теорема об аналитическом продолжении).

Шаг 4: Тензор Фробениуса Φ для $T^{1,0}X \subset TX$, ограниченный на $M = X_\iota$, дает тензор Ниенхойса. В силу шага 3, $\Phi = 0$.

Шаг 5: По теореме Фробениуса, локально по X **существует голоморфная субмерсия $\pi: X \longrightarrow X^{1,0}$, со слоями, касательными $T^{0,1}X$.**

Шаг 6: Пусть f – голоморфная функция на $X^{1,0}$. Тогда $D_x(\pi^* f) = 0$ для любого $x \in T^{0,1}X$. **Поэтому $d(\pi^* f)$ имеет тип $(1,0)$.**

Шаг 7: Мы получили, что **ограничение π на $M \subset X^{1,0}$ голоморфно (потому что $\pi^* f$ от голоморфной функции f голоморфен)**. Ядро дифференциала этого отображения лежит в $TM \cap T^{0,1}X = 0$. По теореме об обратной функции, $\pi|_M : M \longrightarrow X^{1,0}$ – **диффеоморфизм.** ■

Связность на расслоении

ЗАМЕЧАНИЕ: Пространство сечений расслоения B на гладком многообразии обозначается B.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на векторном расслоении B есть отображение $B \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes B$ удовлетворяющее $\nabla(fb) = df \otimes b + f\nabla b$ для любых $b \in B$, $f \in C^\infty M$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $X \in TM$ – векторное поле, $b \in B$, то **$\nabla_X b$ – сечение B, полученное как $\langle \nabla b, X\rangle$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Связность на B определяет связность на двойственном расслоении B^*, и наоборот, по формуле

$$\langle \nabla_X(b), \xi\rangle + \langle b, \nabla_X(\xi)\rangle = \operatorname{Lie}_X(\langle b, \xi\rangle).$$

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любого тензорного расслоения $\mathcal{B}_1 := B^* \otimes B^* \otimes ... \otimes B^* \otimes B \otimes B \otimes ... \otimes B$ **связность на B определяет связность на $\mathcal{B}_1$** по **формуле Лейбница:**

$$\nabla(b_1 \otimes b_2) = \nabla(b_1) \otimes b_2 + b_1 \otimes \nabla(b_2).$$

Формула Картана

УТВЕРЖДЕНИЕ: Для любого $\eta \in \Lambda^1 M$, и $X, Y \in TM$ имеем

$$d\eta(X,Y) = \eta([X,Y]) - \mathrm{Lie}_X(\eta(Y)) + \mathrm{Lie}_Y(\eta(X)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

1. **Обе стороны уравнения удовлетворяют правилу Лейбница.**

3. **Для $\eta = df$, обе стороны уравнения равны нулю.**

4. Дифференциал де Рама есть **единственное** отображение

$$d: \Lambda^*(M) \longrightarrow \Lambda^{*+1}(M),$$

удовлетворяющее правилу Лейбница и $d^2 = 0$.

Кручение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть ∇ – связность на $\Lambda^1 M$,

$$\Lambda^1 \xrightarrow{\nabla} \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M$$

Кручение ∇ задается формулой $\mathsf{Alt} \circ \nabla - d$, где $\mathsf{Alt} : \Lambda^1 M \otimes \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^2 M$ - внешнее умножение. Кручение есть отображение $T_\nabla : \Lambda^1 M \longrightarrow \Lambda^2 M$.

ЗАМЕЧАНИЕ:

$$\begin{aligned} T_\nabla(f\eta) &= \mathsf{Alt}(f\nabla\eta + df \otimes \eta) - d(f\eta) \\ &= f\Big[\mathsf{Alt}(\nabla\eta) - d\eta\Big] + df \wedge \eta - df \wedge \eta = fT_\nabla(\eta). \end{aligned}$$

Значит, T_∇ линейно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Связность на римановом многообразии (M, g) называется **ортогональной**, если $\nabla(g) = 0$, и **связностью Леви-Чивита**, если она ортогональна и без кручения.

ТЕОРЕМА: ("основная теорема дифференциальной геометрии") Каждое риманово многообразие **допускает связность Леви-Чивита, и она единственна.**

Кручение и коммутатор векторных полей

ЗАМЕЧАНИЕ: По формуле Картана,

$$\begin{aligned} T_\nabla(\eta)(X,Y) =& \nabla_X(\eta)(Y) - \nabla_Y(\eta)(X) - d\eta(X,Y) \\ =& \nabla_X(\eta)(Y) - \nabla_Y(\eta)(X) - \eta([X,Y]) - \operatorname{Lie}_X(\eta(Y)) + \operatorname{Lie}_Y(\eta(X)). \end{aligned}$$

С другой стороны, $\nabla_X(\eta)(Y) = \operatorname{Lie}_X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X(Y))$. Сравнивая и сокращая $\operatorname{Lie}_X(\eta(Y))$, $\operatorname{Lie}_Y(\eta(X))$, получаем

$$T_\nabla(\eta)(X,Y) = \eta\Big(\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X,Y]\Big).$$

Кручение часто определяют как отображение $\Lambda^2 TM \longrightarrow TM$ формулой $\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X,Y]$. Это оператор, двойственный определенному выше.

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $B \subset TM$ – подрасслоение, ∇ – связность без кручения, а $\nabla B \subset B \otimes \Lambda^1 M$. Тогда для любых $b, b' \in B$, имеем $[b,b'] = \nabla_b b' - \nabla'_b b \subset B$, **значит,** $[B,B] \subset B$.

СЛЕДСТВИЕ: Если связность без кручения сохраняет оператор почти комплексной структуры, $\nabla(I) = 0$, то I **интегрируемый.**

Кэлеровы многообразия

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть ∇ – связность без кручения. Тогда **из** $\nabla\omega = 0$ **сразу следует** $d\omega = 0$.

ТЕОРЕМА: Пусть (M, I, g) – почти комплексное, эрмитово многообразие, а ∇ – связность Леви-Чивита. Тогда **равносильны:**

(i) $\nabla(I) = 0$

(ii) $d\omega = 0$**, и почти комплексная структура** I **интегрируема.**

ЗАМЕЧАНИЕ: (i) $\Rightarrow$ (ii) следует из выше доказанного, потому что $d\omega = \operatorname{Alt}(\nabla\omega)$. (ii) $\Rightarrow$ (i) – **нетривиальная теорема.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Почти комплексное, эрмитово многообразие многообразие (M, I, g) называется **кэлеровым**, если выполнено любое из условий (i), (ii). Класс когомологий $[\omega] \in H^2(M)$ называется **кэлеровым классом** M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Симплектическая форма** на многообразии есть невырожденная, замкнутая 2-форма.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Кэлерово многообразие всегда симплектично.**

Метрика Фубини-Штуди

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $M = \mathbb{C}P^n$ – комплексное проективное пространство, а $g - U(n+1)$-инвариантная метрика. Она называется **метрикой Фубини-Штуди**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Метрику Фубини-Штуди можно получить, взяв произвольную эрмитову метрику на $\mathbb{C}P^n$ и **усреднив по компактной группе $U(n+1)$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Стабилизатор $x \in \mathbb{C}P^n$ в $U(n+1)$ изоморфен $U(n)$, а $T_x\mathbb{C}P^n$ изоморфно $\mathbb{C}^n$ со стандартным действием $U(n)$.

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $g - U(n)$-инвариантная положительная симметрическая форма на $\mathbb{C}^n$. Тогда g **пропорциональна обычной евклидовой метрике.**

СЛЕДСТВИЕ: Метрика Фубини-Штуди **единственна с точностью до скалярного множителя.**

УПРАЖНЕНИЕ: Пусть $\eta - U(n)$-инвариантная 3-форма на $\mathbb{C}^n$. Докажите, что $\eta = 0$.

СЛЕДСТВИЕ: Метрика Фубини-Штуди **кэлерова**.

Проективные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Замкнутое комплексное подмногообразие $\mathbb{C}P^n$ называется **проективным**

ТЕОРЕМА: **Проективное многообразие всегда кэлерово.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Оно комплексно, а эрмитова форма симплектична.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку $H^2(\mathbb{C}P^n)$ одномерно, **можно выбрать метрику Фубини-Штуди с целочисленным кэлеровым классом.**

СЛЕДСТВИЕ: Проективное многообразие **допускает кэлерову структуру с целочисленным кэлеровым классом.**

ТЕОРЕМА: (Кодаира) Пусть M – компактное, кэлерово многообразие с рациональным кэлеровым классом. **Тогда M проективно.**

Классы многообразий