Комплексные многообразия,

лекция 6

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

1 ноября 2010

Градуированные векторные пространства и алгебры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Градуированное векторное пространство** есть пространство $V^* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V^i$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Еслу V^* градуировано, пространство эндоморфизмов $\operatorname{End}(V^*) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{End}^i(V^*)$ тоже градуировано,

$$\operatorname{End}^i(V^*) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}(V^j, V^{i+j}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Градуированная алгебра** (или "градуированная ассоциативная алгебра") есть алгебра $A^* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ с умножением, которое совместимо с градуировкой: $A^i \cdot A^j \subset A^{i+j}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Билинейное отображение градуированных пространств, которое удовлетворяет $A^i \cdot B^j \subset C^{i+j}$, называется **градуированным**, или **совместимым с градуировкой**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Категорию градуированных векторных пространств можно определить как **категорию векторных пространств с действием** $U(1)$; весовое разложение определяет градуировку по формуле $\rho(t)|_{A^n} = e^{2\pi\sqrt{-1}\,nt}$. Тогда **градуированная алгебра есть ассоциативная алгебра в категории пространств с $U(1)$-действием.**

Суперкоммутатор

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Оператор на градуированном пространстве называется **четным** (**нечетным**), если он сдвигает градуировку на четное (нечетное) число. **Четность** $\tilde{a}$ оператора a есть 0, если он четный, 1 если нечетный. Мы говорим, что оператор **чистый** если он четный или нечетный.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Суперкоммутатор** чистых элементов определяется формулой $\{a, b\} = ab - (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}} ba$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Градуированная ассоциативная алгебра A^* называется **суперкоммутативной** если в A^* суперкоммутатор равен нулю.

ПРИМЕР: Алгебра Грассмана $\Lambda^* V$ суперкоммутативна.

Супералгебры Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Супералгебра Ли** есть градуированное векторное пространство $\mathfrak{g}^*$ снабженное билинейным градуированным произведением $\{\cdot,\cdot\}: \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, которое супер-антикоммутативно:

$$\{a,b\} = -(-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}\{b,a\}$$

и удовлетворяет **супер-тождеству Якоби**

$$\{c,\{a,b\}\} = \{\{c,a\},b\} + (-1)^{\tilde{a}\tilde{c}}\{a,\{c,b\}\}$$

ПРИМЕР: Рассмотрим алгебру $\operatorname{End}^*(V^*)$ всех эндоморфизмов градуированного векторного пространства, с суперкоммутатором, определенным выше. Тогда $\operatorname{End}^*(V^*), \{\cdot,\cdot\}$ **есть супер-алгебра Ли**.

Лемма 1: Пусть d есть нечетный элемент супералгебры Ли над полем характеристики $\neq 2$, удовлетворяющий $\{d,d\} = 0$. **Тогда** $\{\{L,d\},d\} = 0$ для любого L.

Доказательство:

$$0 = \{L,\{d,d\}\} = \{\{L,d\},d\} + (-1)^{\tilde{L}}\{d,\{L,d\}\} = 2\{\{L,d\},d\}.$$

Оператор Ходжа $*$

Пусть V – вещественное векторное пространство. **Метрика на V индуцирует метрику на его тензорных пространствах**, $g(x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_k, x'_1 \otimes x'_2 \otimes ... \otimes x'_k) = g(x_1, x'_1)g(x_2, x'_2)...g(x_k, x'_k)$

Это задает **невырожденное, положительно определенное скалярное произведение на дифференциальных формах** на римановом многообразии: $g(\alpha, \beta) := \int_M g(\alpha, \beta) \operatorname{Vol}_M$

Другая невырожденная форма задается формулой $\alpha, \beta \longrightarrow \int_M \alpha \wedge \beta$ **(спаривание Пуанкаре).**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – риманово n-мерное многообразие. Определим **оператор Ходжа** $* : \Lambda^k M \longrightarrow \Lambda^{n-k} M$ формулой $g(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge * \beta$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Оператор Ходжа всегда существует. В ортонормальном базисе $\xi_1, ..., \xi_n \in \Lambda^1 M$, его можно задать на мономах

$$*(\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge ... \wedge \xi_{i_k}) = (-1)^s \xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge ... \wedge \xi_{j_{n-k}},$$

где $\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, ..., \xi_{j_{n-k}}$ – дополнительный набор ковекторов, а s – сигнатура перестановки $(i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_{n-k})$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $*^2\Big|_{\Lambda^k(M)} = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{Id}_{\Lambda^k(M)}$

Суперсимметрия в кэлеровой геометрии

Пусть (M, I, ω) – кэлерово многообразие. Рассмотрим операторы, действующие на $\Lambda^*(M)$:

1. d, $d^* := - * d *$, $\Delta := dd^* + d^*d$

2. **Оператор Ходжа** $L(\alpha) := \omega \wedge \alpha$ и его сопряженный $\Lambda(\alpha) := *L * \alpha$.

3. **Оператор Вейля:** $\mathcal{W}\Big|_{\Lambda^{p,q}(M)} = \sqrt{-1}\,(p-q)$

ЗАМЕЧАНИЕ: **Это вещественный оператор.**

ТЕОРЕМА: Эти операторы порождают 9-мерную супералгебру Ли $\mathfrak{a}$, действующую на $\Lambda^*(M)$. Лапласиан Δ лежит в центре $\mathfrak{a}$, значит, **$\mathfrak{a}$ действует на когомологиях M.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Это удобный способ задавать **"соотношения Кэлера"** между всеми этими операторами.

ЗАМЕЧАНИЕ: **L, H, Λ порождают алгебру Ли $\mathfrak{sl}(2)$.**

Интегрируемость и разложение Ходжа

УТВЕРЖДЕНИЕ: Почти комплексное многообразие интегрируемо тогда и только тогда, когда $(d^{1,0})^2 = 0$

ЗАМЕЧАНИЕ: Из интегрируемости вместе с теоремой Ньюлендера-Ниренберга легко выводится $(d^{1,0})^2 = 0$, потому что это верно в координатах.

Доказательство. Шаг 1:

$$d\eta(x, y) = \operatorname{Lie}_x(\eta(y)) - \operatorname{Lie}_y(\eta(x)) - \eta([x, y])$$

(формула Картана). Для $\eta \in \Lambda^{1,0}(M)$ и $x, y \in T^{0,1}(M)$, имеем

$$d\eta(x, y) = 0 \Leftrightarrow \eta([x, y]) = 0$$

то есть $d\eta \in \Lambda^{2,0}(M) \oplus \Lambda^{1,1}(M)$ **равносильно интегрируемости.**

Шаг 2: Получаем, что $d^{-1,2}\big|_{\Lambda^1(M)} = 0$ **равносильно интегрируемости.** Поскольку $d^{-1,2}$ удовлетворяет правилу Лейбница, а Λ^1 все порождает, **это равносильно $d^{-1,2} = 0$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: На самом деле, $d^{-1,2} : \Lambda^{0,1}(M) \longrightarrow \Lambda^{2,0}(M)$ есть тензор Ниенхойса.

Интегрируемость и разложение Ходжа (2)

Шаг 3: Функции и замкнутые 1-формы порождают $\Lambda^*(M)$.

Шаг 4: Поскольку d и $d^{-1,2}+d^{0,1}+d^{1,0}+d^{2,-1}$ удовлетворяют соотношению Лейбница, их равенство достаточно проверить на функциях и на 1-формах. **Это дает** $d=d^{-1,2}+d^{0,1}+d^{1,0}+d^{2,-1}$.

Шаг 5: $(2,0)$-компонента $d^2=0$ дает $\{d^{0,1},d^{0,1}\}+\{d^{-1,2},d^{1,0}\}=0$. **Значит,** $(d^{1,0})^2=0$ **равносильно** $\{d^{-1,2},d^{1,0}\}=0$.

Шаг 6: Оператор $d^{-1,2}$ – $C^\infty(M)$-линейный:

$$d^{-1,2}(f\eta)=d^{-1,2}(f)\wedge\eta+fd^{-1,2}(\eta)=fd^{-1,2}(\eta).$$

Шаг 7: Поскольку $d^{1,0}(f)$ порождает $(1,0)$-формы, а $d^{-1,2}$ линейный, $\{d^{-1,2},d^{1,0}\}\Big|_{C^\infty(M)}=0$ **равносильно** $d^{-1,2}=0$.

Шаг 8: Мы получили, что $(d^{1,0})^2=0$ **равносильно** $\{d^{-1,2},d^{1,0}\}$**, что равносильно** $d^{-1,2}=0$. ■

Скрученный дифференциал d^c

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **скрученный дифференциал** d^c определяется формулой $d^c := I^{-1} dI$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: На комплексном многообразии, имеем $d^c = -[\mathcal{W}, d]$.

Доказательство. Шаг 1: $d = d^{0,1} + d^{1,0} \Rightarrow$

$$I^{-1} dI|_{\Lambda^{p,q}} = \sqrt{-1}^{\,p-q} I^{-1}(d^{0,1} + d^{1,0})|_{\Lambda^{p,q}} = \sqrt{-1}\, d^{1,0} - \sqrt{-1}\, d^{0,1}.$$

Шаг 2:

$$\begin{aligned}[\mathcal{W}, d]|_{\Lambda^{p,q}} &= \sqrt{-1}\,(p-q+1) d^{1,0} + \sqrt{-1}\,(p-q-1) d^{0,1} - \sqrt{-1}\,(p-q) d \\ &= -\sqrt{-1}\, d^{1,0} + \sqrt{-1}\, d^{0,1}.\end{aligned}$$

■

СЛЕДСТВИЕ: $\{d, d^c\} = -\{d, \{d, \mathcal{W}\}\} = 0$ (Лемма 1).

СЛЕДСТВИЕ: Пусть (M, I) - комплексное многообразие. Тогда $\partial := \frac{d + \sqrt{-1}\, d^c}{2}$, $\overline{\partial} := \frac{d - \sqrt{-1}\, d^c}{2}$ **– компоненты в разложении Ходжа** d: $\partial = d^{1,0}$, $\overline{\partial} = d^{0,1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $d = d^{0,1} + d^{1,0}$, а $d^c = \sqrt{-1}\, d^{1,0} - \sqrt{-1}\, d^{0,1}$. ■

Дифференциал де Рама на кэлеровом многообразии

ТЕОРЕМА: Следующие утверждения равносильны.

1. I интегрируемо. 2. $\partial^2 = 0$. 3. $\overline{\partial}^2 = 0$. 4. $dd^c = -d^c d$ 5. $dd^c = 2\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Равносильность интегрируемости и $\overline{\partial}^2 = 0$ доказана выше. $\overline{\partial}^2 = \frac{\{d, d^c\}}{2}$, что дает равносильность 3 и 4, а 5 получается из формулы $4\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial} = dd^c - d^c d$. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Оператор $dd^c : \ \Lambda^{p,q}(M) \longrightarrow \Lambda^{p+1,q+1}(M)$ называется **плюрилапласиан**.

ТЕОРЕМА: (Соотношения Кэлера, они же соотношения Кодаиры).
На кэлеровом многообразии, имеем

$$[\Lambda, \partial] = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}^*, \quad [\Lambda, \overline{\partial}] = -\sqrt{-1}\,\partial^*, \quad [L, \overline{\partial}^*] = -\sqrt{-1}\,\partial, \quad [L, \partial^*] = \sqrt{-1}\,\overline{\partial}.$$

Или, что эквивалентно,

$$[\Lambda, d] = (d^c)^*, \qquad [\Lambda, d^*] = -d^c, \qquad [L, d^c] = -d^*, \qquad [L, (d^c)^*] = d.$$

Доказательство этих соотношений будет позже.

Алгебраические дифференциальные операторы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A^* – градуированная суперкоммутативная алгебра. Пространство $D^i(A^*) \subset \operatorname{End}(A^*)$ **алгебраических дифференциальных операторов** определяется индуктивно,

1. $D^0(A)$ – пространство A^*-линейных эндоморфизмов, то есть $D^0(A^*) \cong A^* \subset \operatorname{End}(A^*)$.

2. Пусть L_a есть **оператор умножения,** $L_a(\eta) := a \cdot \eta$, где $a \in A^*$ Тогда **$D^{n+1}(A^*)$ – градуированное подпространство в $\operatorname{End}(A^*)$, состоящее из всех эндоморфизмов $\rho \in \operatorname{End}(A^*)$ (четных или нечетных), которые удовлетворяют $\{L_a, \rho\} \in D^n(A^*)$, для любого $a \in A^*$.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Произведение дифференциальных операторов – дифференциальный оператор: $D^i(A^*)D^j(A^*) \subset D^{i+j}(A^*)$. Это следует из $\{a, bc\} = \{a, b\}c + (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}} b\{a, c\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Коммутатор дифференциальных операторов – оператор низшего порядка: $[D^i(A^*), D^j(A^*)] \subset D^{i+j-1}(A^*)$. Это следует из $\{a, \{b, c\}\} = \{\{a, b\}, c\} + (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}\{b, \{a, c\}\}$.

Дифференциальные операторы первого порядка

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дифференцирование** $\delta: A^* \longrightarrow A^*$ – эндоморфизм, который удовлетворяет **правилу Лейбница:** $\delta(ab) = \delta(a)b + (-1)^{\tilde{a}\tilde{\delta}} a\delta(b)$, для любых $a, b \in A^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Дифференцирование алгебры есть дифференциальный оператор первого порядка:**

$$\{L_a, \delta\}(b) = a\delta(b) - (-1)^{\tilde{a}\tilde{\delta}}\delta(ab) = -(-1)^{\tilde{a}\tilde{\delta}}\delta(a)b.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ: Пусть $D \in D^1(A^*)$ – дифференциальный оператор первого порядка. Тогда $D - L_{D(1)}$ – дифференцирование.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно доказать это в предположении, что $D(1) = 0$. Поскольку $\{D, L_a\}$ линейный, имеем

$$\begin{aligned} D(ab) - (-1)^{\tilde{a}\tilde{D}} aD(b) =& \{D, L_a\}(b) = \{D, L_a\}(1)b \\ =& D(a)b + (-1)^{\tilde{a}\tilde{D}} aD(1) = D(a)b. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ: Дифференциальный оператор первого порядка на A **однозначно определяется значениями, которые он принимает на любом наборе мультипликативных генераторов A.**

Свойства коммутатора $[L_a, d^*]$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: d^* **есть оператор второго порядка.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: В ортонормальном базисе $\xi_i \in TM$, d^* записывается как сумма $d^* = \sum \operatorname{Lie}_{\xi_i} i(\xi_i)$, где Lie есть производная Ли, а $i(\xi_i)$ – подстановка. Легко видеть, что $i(\xi_i)$ дифференцирование, значит, $Lie_{\xi_i} i(\xi_i)$ **произведение дифференцирований, то есть оператор второго порядка.** ■

СЛЕДСТВИЕ: Коммутатор $[L_a, d^*]$ **– дифференциальный оператор первого порядка,** для любого $a \in \Lambda^*(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $[L, d^*](1) = d^*\omega = C * d\omega^{n-1} = 0$, значит, $[L, d^*]$ **– дифференцирование.**

Доказательство соотношений Кодаиры

ЗАМЕЧАНИЕ: Имеем $*(\omega) = \frac{1}{(n-1)!2^{n-1}}\omega^{n-1}$, и $*(\eta) = \frac{1}{(n-1)!2^{n-1}}\omega^{n-1} \wedge I(\eta)$ для любой 1-формы η. Также $*(\omega \wedge \eta) = \frac{1}{(n-2)!2^{n-2}}\omega^{n-2} \wedge I(\eta)$.

Доказательство соотношений Кодаиры. Шаг 1: На функциях $[L, d^*]$ действует как $[L, d^*](f) = -\frac{1}{(n-1)!2^{n-1}} * df \wedge \omega^{n-1} = -d^c f$.

Шаг 2: Значит, $d^* d^c f = d^*[L, d^*]f = -[L, d^*]d^* f = 0$ (Лемма 1).

Шаг 3: Следовательно, на d^c-замкнутых 1-формах η имеем

$$[L, d^*]\eta = -d^* L(\eta) = \pm\frac{1}{(n-2)!2^{n-2}} * d(\omega^{n-2} \wedge I(\eta)) = 0.$$

Шаг 4: Мы получили, что $[L, d^*] = -d^c$ на функциях и на d^c-замкнутых 1-формах. Поскольку они порождают $\Lambda^*(M)$, а $[L, d^*]$ и $-d^c$ – дифференцирования, **эти операторы равны.** ■

Операторы Лапласа и суперкоммутаторы

ТЕОРЕМА: Пусть

$$\Delta_d := \{d, d^*\}, \quad \Delta_{d^c} := \{d^c, d^{c*}\}, \quad \Delta_\partial := \{\partial, \partial^*\}, \Delta_{\overline{\partial}} := \{\overline{\partial}, \overline{\partial}^*\}.$$

Тогда $\Delta_d = \Delta_{d^c} = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\overline{\partial}}$. В частности, Δ_d **сохраняет разложение Ходжа.**

Доказательство. Шаг 1: Имеем $\{d, d^c\} = 0$ (интегрируемость).

Шаг 2: Соотношение Якоби: $\{d, d^*\} = -\{d, \{\Lambda, d^c\}\} = \{\{\Lambda, d\}, d^c\} = \{d^c, d^{c*}\}$. Аналогичное вычисление с $\partial, \overline{\partial}$ дает $\Delta_\partial = \Delta_{\overline{\partial}}$.

Шаг 3: $\{\partial, \overline{\partial}^*\} = \sqrt{-1}\{\partial, \{\Lambda, \partial\}\} = 0$ (Лемма 1). То же вычисление показывает, что **все антикоммутаторы вида $\{\partial, \overline{\partial}^*\}$ и так далее зануляются,** кроме $\{\partial, \partial^*\}$ и $\{\overline{\partial}, \overline{\partial}^*\}$. Это дает $\Delta_d = \Delta_\partial + \Delta_{\overline{\partial}}$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Лапласиан коммутирует с d, d^c, d^*, d^{c*} (Lemma 1), и с L, Λ, H в силу $[L, \Delta] = [L, \{d, d^*\}] = \{d, [L, d^*]\} = \{d, d^c\}$. Значит, **это центральный элемент.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы доказали, что $L, \Lambda, d, \mathcal{W}$ **порождают супералгебру размерности $(5|4)$ с одномерным центром $\mathbb{R}\Delta$.**