Комплексные многообразия,

лекция 5

Миша Вербицкий

НМУ/НОЦ, Москва

18 октября 2010

Лекции 25-го октября не будет!
1-го ноября будет.

Градуированные векторные пространства и алгебры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Градуированное векторное пространство** есть пространство $V^* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} V^i$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Еслу V^* градуировано, пространство эндоморфизмов $\operatorname{End}(V^*) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{End}^i(V^*)$ тоже градуировано,

$$\operatorname{End}^i(V^*) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}(V^j, V^{i+j}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Градуированная алгебра** (или "градуированная ассоциативная алгебра") есть алгебра $A^* = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ с умножением, которое совместимо с градуировкой: $A^i \cdot A^j \subset A^{i+j}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Билинейное отображение градуированных пространств, которое удовлетворяет $A^i \cdot B^j \subset C^{i+j}$, называется **градуированным**, или **совместимым с градуировкой**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Категорию градуированных векторных пространств можно определить как **категорию векторных пространств с действием $U(1)$**; весовое разложение определяет градуировку по формуле $\rho(t)|_{A^n} = e^{2\pi\sqrt{-1}\,nt}$. Тогда **градуированная алгебра есть ассоциативная алгебра в категории пространств с $U(1)$-действием.**

Суперкоммутатор

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Оператор на градуированном пространстве называется **четным** (**нечетным**), если он сдвигает градуировку на четное (нечетное) число. **Четность** $\tilde{a}$ оператора a есть 0, если он четный, 1 если нечетный. Мы говорим, что оператор **чистый** если он четный или нечетный.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Суперкоммутатор** чистых элементов определяется формулой $\{a, b\} = ab - (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}} ba$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Градуированная ассоциативная алгебра A^* называется **суперкоммутативной** если в A^* суперкоммутатор равен нулю.

ПРИМЕР: Алгебра Грассмана $\Lambda^* V$ суперкоммутативна.

Супералгебры Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Супералгебра Ли** есть градуированное векторное пространство $\mathfrak{g}^*$ снабженное билинейным градуированным произведением $\{\cdot,\cdot\}: \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, которое супер-антикоммутативно:

$$\{a,b\} = -(-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}\{b,a\}$$

и удовлетворяет **супер-тождеству Якоби**

$$\{c,\{a,b\}\} = \{\{c,a\},b\} + (-1)^{\tilde{a}\tilde{c}}\{a,\{c,b\}\}$$

ПРИМЕР: Рассмотрим алгебру $\operatorname{End}^*(V^*)$ всех эндоморфизмов градуированного векторного пространства, с суперкоммутатором, определенным выше. Тогда $\operatorname{End}^*(V^*), \{\cdot,\cdot\}$ **есть супер-алгебра Ли**.

Лемма 1: Пусть d есть нечетный элемент супералгебры Ли над полем характеристики $\neq 2$, удовлетворяющий $\{d,d\} = 0$. **Тогда** $\{\{L,d\},d\} = 0$ для любого L.

Доказательство:

$$0 = \{L,\{d,d\}\} = \{\{L,d\},d\} + (-1)^{\tilde{L}}\{d,\{L,d\}\} = 2\{\{L,d\},d\}.$$

Дифференциал де Рама

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – гладкое многообразие, $\Lambda^* M$ - его алгебра де Рама. Оператор $d: \Lambda^i(M) \longrightarrow \Lambda^{i+1}(M)$ называется **дифференциалом де Рама**, если он удовлетворяет следующим условиям

1. **Градуированное соотношение Лейбница**

$$d(\alpha \wedge \beta) = d(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\tilde{\alpha}} \alpha \wedge d\beta$$

2. $d^2 = 0$

3. На функциях, $d: C^\infty M \longrightarrow \Lambda^1(M)$ – обычный дифференциал.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Единственность дифференциала де Рама очевидна.** Действительно, d определяется своими значениями на образующих $\Lambda^*(M)$. Но эта алгебра порождена $C^\infty M$ и $dC^\infty M$.

Существование d: Достаточно доказать существование d локально, и воспользоваться единственностью для склейки. На $\mathbb{R}^n$, d определяется формулой $d(fP) = \sum_i \frac{df}{dx_i} dx_i \wedge P$ для любого координатного монома $P = dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$.

Теорема Стокса

Теорема Стокса: $\int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta$, если M – гладкое многообразие с краем ∂M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Форма η называется **точной**, если $\eta = d\alpha$, и **замкнутой**, если $d\eta = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку $d^2 = 0$, **любая точная форма замкнута**.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: $H^i(M) := \frac{\text{закнутые } i\text{-формы на } M}{\text{точные } i\text{-формы}}$ называется **группой i-х когомологий**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для замкнутой i-формы η и подмногообразия $X \subset M$, **интеграл $\int_X \eta$ зависит только от класса когомологий η и от класса гомотопии X.**

Оператор Ходжа $*$

Пусть V – вещественное векторное пространство. **Метрика на V индуцирует метрику на его тензорных пространствах**, $g(x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_k, x'_1 \otimes x'_2 \otimes ... \otimes x'_k) = g(x_1, x'_1) g(x_2, x'_2) ... g(x_k, x'_k)$

Это задает **невырожденное, положительно определенное скалярное произведение на дифференциальных формах** на римановом многообразии: $g(\alpha, \beta) := \int_M g(\alpha, \beta) \operatorname{Vol}_M$

Другая невырожденная форма задается формулой $\alpha, \beta \longrightarrow \int_M \alpha \wedge \beta$ **(спаривание Пуанкаре).**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M – риманово n-мерное многообразие. Определим **оператор Ходжа** $* : \Lambda^k M \longrightarrow \Lambda^{n-k} M$ формулой $g(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge * \beta$.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Оператор Ходжа всегда существует**. В ортонормальном базисе $\xi_1, ..., \xi_n \in \Lambda^1 M$, его можно задать на мономах

$$*(\xi_{i_1} \wedge \xi_{i_2} \wedge ... \wedge \xi_{i_k}) = (-1)^s \xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge ... \wedge \xi_{j_{n-k}},$$

где $\xi_{j_1}, \xi_{j_2}, ..., \xi_{j_{n-k}}$ – дополнительный набор ковекторов, а s – сигнатура перестановки $(i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_{n-k})$.

ЗАМЕЧАНИЕ: $*^2\Big|_{\Lambda^k(M)} = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{Id}_{\Lambda^k(M)}$

Теория Ходжа

УТВЕРЖДЕНИЕ: На компактном римановом многообразии, имеем $d^*\big|_{\Lambda^k M} = (-1)^{nk} * d*$, где d^* – **сопряженный оператор** к d, $(d\alpha, \gamma) = (\alpha, d^*\gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: По теореме Стокса,

$$0 = \int_M d(\alpha \wedge \beta) = \int_M d(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{\tilde{\alpha}} \alpha \wedge d(\beta),$$

значит $(d\alpha, *\beta) = (-1)^{\tilde{\alpha}}(\alpha, *d\beta)$. Написав $\gamma := *\beta$, получаем

$$(d\alpha, \gamma) = (-1)^{\tilde{\alpha}}(\alpha, *d(*)^{-1}\gamma) = (-1)^{\tilde{\alpha}}(-1)^{\tilde{\alpha}(\tilde{n}-\tilde{\alpha})}(\alpha, *d*\gamma) = (-1)^{\tilde{\alpha}\tilde{n}}(\alpha, *d*\gamma).$$

■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Антикоммутатор $\Delta := \{d, d^*\} = dd^* + d^*d$ называется **оператор Лапласа** на M. Это самосопряженный, положительно определенный оператор: $(\Delta x, x) = (dx, dx) + (d^*x, d^*x)$.

Основная теорема теории Ходжа: Существует **базис в гильбертовом пространстве** $L^2(\Lambda^*(M))$, состоящий из собственных векторов Δ, и каждое собственное пространство конечномерно.

ТЕОРЕМА: **(“Эллиптическая регулярность”)** Пусть $\alpha \in L^2(\Lambda^k(M))$ – собственный вектор Δ. **Тогда α – гладкая k-форма.**

Теория Ходжа и когомологии

Определение: Форма α называется **гармонической**, если $\Delta(\alpha) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любой гармонической формы α, $0 = (\Delta\alpha, \alpha) = (d\alpha, d\alpha) + (d^*\alpha, d^*\alpha)$, значит, $\alpha \in \ker d \cap \ker d^*$. Получаем, что **любая гармоническая форма на компактном многообразии замкнута.**

ТЕОРЕМА: Пусть M – компактное, риманово. Тогда естественное отображение $\mathcal{H}^i(M) \longrightarrow H^i(M)$ из гармонических форм в когомологии – изоморфизм.

Доказательство. Шаг 1: Поскольку $\ker d^* = (\operatorname{im} d)^\perp$, **естественное отображение $\mathcal{H}^i(M) \longrightarrow H^i(M)$ инъективно.**

Шаг 2: $\{d, \{d, d^*\}\} = 0$ по Лемме 1. Поэтому d **коммутирует с Δ.**

Шаг 3: Рассмотрим весовое разложение $\Lambda^*(M) \hat{=} \bigoplus_\alpha \mathcal{H}^*_\alpha(M)$, где α пробегает через все собственные значения Δ. Для каждого α, **дифференциал де Рама сохраняет собственные пространства Δ,** что дает комплекс

$$\mathcal{H}^0_\alpha(M) \xrightarrow{d} \mathcal{H}^1_\alpha(M) \xrightarrow{d} \mathcal{H}^2_\alpha(M) \xrightarrow{d} \dots$$

Теория Ходжа и когомологии (продолжение)

Шаг 4: На $\mathcal{H}^*_\alpha(M)$, имеем $dd^* + d^*d = \alpha$. Когда $\alpha \neq 0$, и η замкнута, это дает $dd^*(\eta) + d^*d(\eta) = dd^*\eta = \alpha\eta$, значит $\eta = d\xi$, где $\xi := \alpha^{-1}d^*\eta$. Значит, для ненулевых α, **комплексы** $(\mathcal{H}^*_\alpha(M), d)$ **не дают вклада в когомологии**

Шаг 5: Мы доказали, что

$$H^i(\Lambda^* M, d) = \bigoplus_\alpha H^i(\mathcal{H}^*_\alpha(M), d) = H^i(\mathcal{H}^*_0(M), d) = \mathcal{H}^i(M).$$

■

ЗАМЕЧАНИЕ: Из этой теоремы сразу следует **двойственность Пуанкаре между** $H^i(M)$ **и** $H^{n-i}(M)$**:** $\int_M \eta \wedge * \eta \neq 0$ для любого η, что дает **невырожденность спаривания** $H^i(M) \otimes H^{n-i}(M) \longrightarrow H^n(M) = H^0(M) = \mathbb{R}$**.** Здесь используется то, что для гармоничного η, форма $*\eta$ тоже гармонична, следовательно, замкнута.

Суперсимметрия в кэлеровой геометрии

Пусть (M, I, ω) – кэлерово многообразие. Рассмотрим операторы, действующие на $\Lambda^*(M)$:

1. d, d^*, Δ

2. **Оператор Ходжа** $L(\alpha) := \omega \wedge \alpha$ и его сопряженный $\Lambda(\alpha) := *L * \alpha$.

3. **Оператор Вейля:** $\mathcal{W}\Big|_{\Lambda^{p,q}(M)} = \sqrt{-1}\,(p-q)$

ЗАМЕЧАНИЕ: **Это вещественный оператор.**

ТЕОРЕМА: Эти операторы порождают 9-мерную супералгебру Ли $\mathfrak{a}$, действующую на $\Lambda^*(M)$. Лапласиан Δ лежит в центре $\mathfrak{a}$, значит, **$\mathfrak{a}$ действует на когомологиях M.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Это удобный способ задавать **"соотношения Кэлера"** между всеми этими операторами.

Координатные операторы

Пусть V – евклидово пространство, v_i – его базис, $e_{v_i} : \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^{k+1} V$ оператор умножения на v_i, $e_{v_i}(\eta) = e_i \wedge \eta$. а $i_{v_i} : \Lambda^k V \longrightarrow \Lambda^{k-1} V$ сопряженный оператор, $i_{v_i} = * e_{v_i} *$.

УТВЕРЖДЕНИЕ: Операторы e_{v_i}, i_{v_i}, Id задают базис в **нечетной супералгебре Гейзенберга** $\mathfrak{H}$, где единственный нетривиальный суперкоммутатор задается $\{e_{v_i}, i_{v_j}\} = \delta_{i,j} \operatorname{Id}$.

Пусть теперь V, I, g – эрмитово n-мерное векторное пространство, а $\omega = \sum_{i=1}^n v_{2i-1} \wedge v_{2i}$ эрмитова форма. Определим **операторы Ходжа** $L(\alpha) = \omega \wedge \alpha$, и $\Lambda := L^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Из соотношений в $\mathfrak{H}$, немедленно следует, что

$$H := [L, \Lambda] = \left[\sum e_{v_{2i-1}} e_{v_{2i}}, \sum i_{v_{2i-1}} i_{v_{2i}}\right] = \sum_{i=1}^{2n} e_{v_i} i_{v_i} - \sum_{i=1}^{2n} i_{v_i} e_{v_i},$$

скалярный оператор, действующий на k-формах умножением на $n-k$.

$\mathfrak{sl}(2)$-действие Лефшеца

СЛЕДСТВИЕ: Операторы L, Λ, H образуют алгебру Ли, изоморфную $\mathfrak{s}l(2)$, с соотношениями $[L, \Lambda] = H$, $[H, L] = 2L$, $[H, \Lambda] = -2\Lambda$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: L, Λ, H называется **$\mathfrak{sl}(2)$-тройкой Лефшеца**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Конечномерные представления $\mathfrak{sl}(2)$ **полупросты**..

ЗАМЕЧАНИЕ: Неприводимое представление V алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ порождено **младшим вектором** $v \in V$ $\Lambda(v) = 0$, $H(v) = -pv$, где $p \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$, и вектора $v, L(v), L^2(v), ..., L^p(v)$ образуют его базис. **Такое представление однозначно задается числом** p, и обозначается V_p.

ЗАМЕЧАНИЕ: В таком базисе, H **действует диагонально:** $H(L^i(v)) = (2i - p)L^i(v)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Имеем $V_p = \mathrm{Sym}^p V_1$, где V_1 – стандартное (тавтологическое, фундаментальное) 2-мерное представление $\mathfrak{sl}(2)$.

СЛЕДСТВИЕ: Для конечномерного представления $\mathfrak{s}l(2)$, обозначим за $V^{(i)}$ собственное пространство H, $H\Big|_{V^{(i)}} = i$. Тогда L^i **определяет изоморфизм** $V^{(-i)} \xrightarrow{L^i} V^{(i)}$ **для любого** $i > 0$.

Теорема Лефшеца.

ЗАМЕЧАНИЕ: **Следующая теорема сразу следует из теоремы о суперсимметрии** (недоказанной).

ТЕОРЕМА: На компактном кэлеровом многообразии **$\mathfrak{sl}(2)$-операторы Лефшеца и оператор Вейля сохраняют дифференциальные формы.**

СЛЕДСТВИЕ: Любой класс когомологий представим как сумма замкнутых (p,q)-форм, что дает разложение $H^i(M) = \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q}(M)$, причем $\overline{H^{p,q}(M)} = H^{q,p}(M)$.

СЛЕДСТВИЕ: **Нечетные когомологии кэлерова многообразия четномерны.**

СЛЕДСТВИЕ: Пусть M – компактное, кэлерово, комплексной размерности n, а $i+p+q=n$. Тогда L^i определяет **изоморфизм Лефшеца** $H^{p,q} \xrightarrow{L^i} H^{p+2i,q+2i}(M)$

Ромб Ходжа

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^{n,n} & & \\
 & H^{n,n-1} & & H^{n-1,n} & \\
H^{n,n-2} & & H^{n-1,n-1} & & H^{n-2,n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
H^{2,0} & & H^{1,1} & & H^{0,2} \\
 & H^{1,0} & & H^{0,1} & \\
 & & H^{0,0} & &
\end{array}$$

Лекции 25-го октября не будет!
1-го ноября будет.